Udruženje matematičara "Algoritam"
(http://umalgoritam.ba)

Pedagoški zavod Mostar
(http://pzm.ba)

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz matematike

Školska 2018/2019. godina

Zadatke pripremili: mr.sc. Sead Peco, mr.sc. Elmir Čatrnja

Mostar, 16. 03. 2019.

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 16. 03. 2019.

I razred

Zadatak I.1 (10 bodova)**:** Neki polinom pri djeljenju sa $(x-1)$ daje ostatak 2, a pri djeljenju sa $(x-2)$ daje ostatak 1. Koji ostatak daje ovaj polinom pri djeljenju sa x^2-3x+2.

Rješenje. Primijetimo da je $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. 2 boda

Pri djeljenju polinomom drugog stepena ostatak je polinom prvog stepena, pa je

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b.$$

3 boda

Iz uslova zadatka je $P(1)=2$ i $P(2)=1$, 2 boda

pa dobijamo

$$a+b=2$$

i

$$2a+b=1.$$

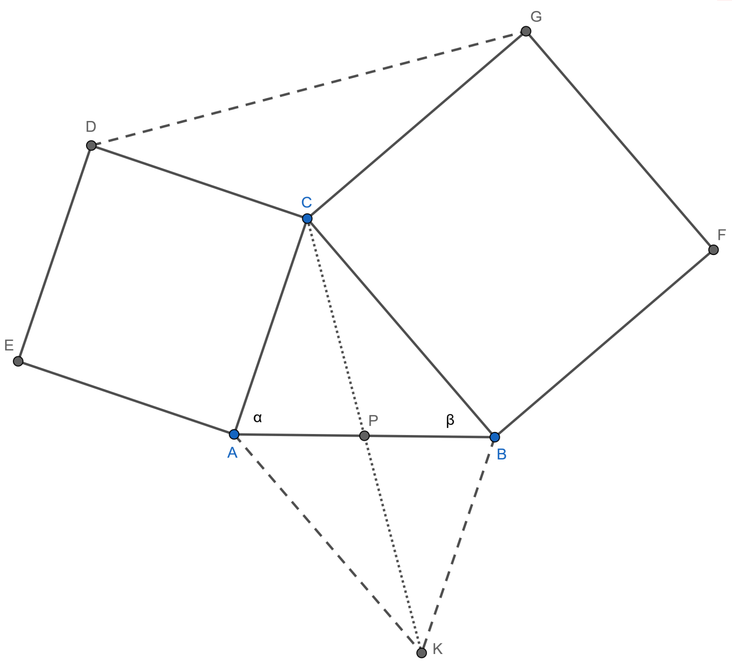
2 boda

Riješenje ovog sistema je $a=-1$ i $b=3$, pa je traženi ostatak $R(x)=-x+3$. 1 bod

□

Zadatak I.2 (10 bodova)**:** Nad stranicama AC i BC oštrouglog trougla ABC konstruisani su sa vanjske strane kvadrati $ACDE$ i $BFGC$. Tačka P je središte stranice AB trougla. Dokazati da je $|DG| = 2|CP|$.

Rješenje.



1 bod

Konstruišimo tačku K tako da je $|CK| = 2 \cdot |CP|$. 3 boda

Posmatrajmo trouglove AKC i CGD. Vrijedi:

$|AK| = |BC| = |CG|$ jer je četverougao $AKBC$ paralelogram (jer mu se dijagonale polove) i $|AC| = |CD|$. Osim toga $\sphericalangle CAK = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ (jer je $AK || CB$), a isto tako je $\sphericalangle DCG = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \gamma) = 180^\circ - \gamma$. 4 boda

Na osnovu ovoga je je $\triangle AKC \cong \triangle CGD$. 1 bod

Dakle, $|DG| = |CK| = 2 \cdot |CP|$. 1 bod

$\square$

Zadatak I.3 (15 bodova)**:** Odrediti sve četverocifrene brojeve čije su prve dvije cifre međusobno jednake i zadnje dvije cifre međusobno jednake, a koji su potpuni kvadrati (tj. kvadrati nekog prirodnog broja).

Rješenje. **Prvo rješenje.**
Neka je traženi broj kvadrat broja n, dakle $n^2 = \overline{aabb}$. Vrijedi

$$\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b) = 11 \cdot \overline{a0b},$$

pri čemu su a i b cifre, $a \neq 0$, tj. broj $\overline{aabb} = n^2$ je djeljiv s 11. 3 boda

Odavde zaključujemo da je n djeljiv s 11, 2 boda

tj. $n = 11k$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

No, to znači da je traženi broj oblika $121k^2$.

Da bi taj broj bio četverocifren mora biti $k \geq 3$ i $k \leq 9$. 2 boda

Računamo redom

k	3	4	5	6	7	8	9
$121k^2$	1089	1936	3025	4356	5929	7744	9801

6 bodova

Vidimo da je jedino rješenje broj 7744 (kvadrat broja 88). 2 boda

Napomena. Gornjih 6 bodova dodjeljuje se po jedan bod za rješenje (eliminaciju) svakog pojedinog slučaja, za k iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Ako je vrijednost $(121k)^2$ pogrešno izračunata, taj bod se ne dodjeljuje.

Neki slučajevi mogu se eliminirati i promatrajući zadnje cifre broja $(11k)^2$.

Npr. za $k = 5$, kvadrat broja 55 završava ciframa 25, pa nije traženog oblika.

Ili, kako kvadrat prirodnog broja ne može završiti ciframa 66 (jer je takav broj paran, a nije djeljiv s 4), traženi broj nije kvadrat broja 44 niti 66 (jer njihovi kvadrati završavaju cifrom 6).

Drugo rješenje.

Traženi broj je oblika

$$\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b)$$

gdje je $a \neq 0$. 2 boda

Budući da je traženi broj potpuni kvadrat, zaključujemo da izraz $100a+b$ mora biti djeljiv sa 11. 2 boda

Budući da je $100a + b = 99a + (a + b)$, to znači da $11 | a + b$, a kako je $1 \leq a + b \leq 18$, zaključujemo da je $a + b = 11$. 2 boda

Stoga je traženi broj oblika $11 \cdot (99a + 11) = 11^2 \cdot (9a + 1)$ Sada vidimo da $9a + 1$ mora biti potpuni kvadrat. 2 boda

Dakle mora biti $9a = m^2 - 1$ i $1 = (m - 1)(m + 1)$ za neki prirodan broj m. 1 bod

Buduci da je $a \leq 9$, zaključujemo da je $m \leq 9$.

Jedini zajednički djelitelj brojeva $m - 1$ i $m + 1$ može biti 2, pa 9 mora dijeliti jednog od njih. 2 boda

To je moguće jedino ako je $m + 1 = 9$, tj. ako je $m = 8$ i $a = m - 1 = 7$. 2 boda

Sada iz $a + b = 11$ slijedi $b = 4$. 1 bod

Traženi broj je $7744 = 88^2$. $\square$ 1 bod

Zadatak I.4 (15 bodova)**:** Dokazati datu jednakost

$$\left(\frac{b^2-bc+c^2}{a}+\frac{a^2}{b+c}-\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)\cdot\frac{\frac{2}{b}+\frac{2}{c}}{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}}+(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2).$$

Rješenje. Sređujući lijevu stranu jednakosti, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b^2-bc+c^2}{a}+\frac{a^2}{b+c}-\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)\cdot\frac{\frac{2}{b}+\frac{2}{c}}{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=\left(\frac{b^2-bc+c^2}{a}+\frac{a^2}{b+c}-\frac{3}{\frac{b+c}{bc}}\right)\cdot\frac{\frac{2b+2c}{bc}}{\frac{a+b+c}{abc}}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=\left(\frac{b^2-bc+c^2}{a}+\frac{a^2}{b+c}-\frac{3bc}{b+c}\right)\cdot\frac{2a(b+c)}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=\frac{(b^2-bc+c^2)(b+c)+a^3-3abc}{a(b+c)}\cdot\frac{2a(b+c)}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=(b^3-b^2c+b^2c-bc^2+bc^2+c^3+a^3-3abc)\cdot\frac{2}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=2\frac{b^3+c^3+a^3-3abc}{a+b+c}+(a+b+c)^2
\end{aligned}$$

6 bodova

Dalje je

$$\begin{aligned}
&2\frac{b^3+c^3+a^3-3abc}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=2\frac{(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=2\frac{(a+b+c)\cdot[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=2\frac{(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\\
&\qquad=2(a^2-ab+b^2-ac-bc+c^2)+(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)=\\
&\qquad=2a^2-2ab+2b^2-2ac-2bc+2c^2+a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=\\
&\qquad=3a^2+3b^2+3c^2=\\
&\qquad=3(a^2+b^2+c^2).
\end{aligned}$$

8 bodova

Konačno je

$$\left(\frac{b^2-bc+c^2}{a}+\frac{a^2}{b+c}-\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)\cdot\frac{\frac{2}{b}+\frac{2}{c}}{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}}+(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2).$$

1 bod

$\square$

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 16. 03. 2019.

II razred

Zadatak II.1 (10 bodova)**:** Za koje kompleksne brojeve z je broj z^3 realan i veći od 27?

Rješenje. Neka je $z = a + bi$. Tada je

$$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.$$

3 boda

Ovaj kompleksan broj je realan ako i samo ako je $3a^2b - b^3 = b(3a^2 - b^2) = 0$, tj. mora biti $b = 0$ ili $b = a\sqrt{3}$ ili $b = -a\sqrt{3}$. 2 boda

Budući da je $\operatorname{Re} z^3 > 27$, imamo $a^3 - 3ab^2 > 27$. 1 bod

Moramo promatrati ova dva slučaja:

1) Za $b = 0$ je $a^3 > 27$, odakle je $a > 3$, 1 bod

2) Za $b = \pm a\sqrt{3}$ je $b^2 = 3a^2$, pa se dobija $a < -\dfrac{3}{2}$. 1 bod

Traženi brojevi su:

$z = a$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ i $a > 3$;

$z = a(1 \pm i\sqrt{3})$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ i $a < -\dfrac{3}{2}$. 2 boda

$\square$

Zadatak II.2 (10 bodova)**:** Neka su x_1 i x_2 rješenja jednačine

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0,\ (p \in \mathbb{R}/\{0\}).$$

Dokazati da tada vrijedi $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

Rješenje. Na osnovu Vietovih formula vrijedi $x_1 + x_2 = -p$ i $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2}$. 1 bod

Dalje je

$$\begin{aligned}
x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \\
&= [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2 = \\
&= \left[p^2 + 2\frac{1}{2p^2}\right]^2 - 2\frac{1}{4p^4} = \\
&= p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} = \\
&= p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}.
\end{aligned}$$

4 boda

Sada na osnovu AG nejednakosti, imamo

$$p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 + 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} = 2 + \sqrt{2}.$$

4 boda

Konačno je

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

1 bod

$\square$

Zadatak II.3 (15 bodova)**:** Koliko ima kvadratnih funkcija s koeficijentima iz skupa $S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ kojima nijedna nula nije realna?

Rješenje. Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ nema realnih nula ako i samo ako je $b^2 - 4ac < 0$. 2 boda

Za $a, b, c \in S$, možemo staviti $a = 2^k$, $b = 2^s$, $c = 2^l$, gdje su $k, l, s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 2 boda

Tada je

$$b^2 - 4ac = (2^s)^2 - 4 \cdot 2^k \cdot 2^l = 2^{2s} - 2^{2+k+l}$$

svojstvom pa je uslov $b^2 - 4ac < 0$ ekvivalentan s $2s < 2 + k + l$, odnosno s $k + l + 2 > 2s$. 3 boda

Odredimo broj mogućih odabira brojeva $k; l; s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ takvih da vrijedi $k+l+2 > 2s$, ovisno o zbiru $k + l$:

$k + l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
broj izbora (k, l)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
broj izbora s	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

5 bodova

Zato je ukupan broj funkcija sa željenom osobinom jednak

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 135.$$

3 boda

□

Zadatak II.4 (15 bodova)**:** Tetiva $\overline{AB}$ paralelna je s prečnikom $\overline{MN}$ kružnice. Neka je t tangenta te kružnice u tački M, te neka su tačke C i D redom presjeci pravih NA i NB s pravom t. Dokazati da vrijedi

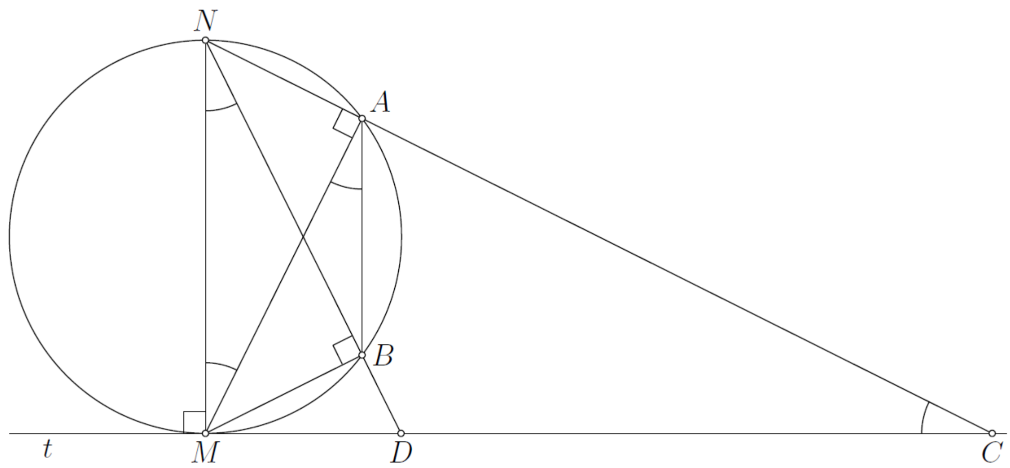
$$|MC| \cdot |MD| = |MN|^2.$$

Rješenje. Neka je $\sphericalangle MND = \alpha$. Tada je

$$\begin{aligned}\alpha = \sphericalangle MNB = \sphericalangle MAB \text{ (periferijski uglovi) } &= \\ = \sphericalangle AMN \text{ (jer je } AB \| MN),&\end{aligned}$$

2 boda

pa je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMN - \sphericalangle AMN = 90° - \alpha$. 1 bod



3 boda

Uočimo da je trougao MAN pravougli jer je $\overline{MN}$ prečnik kružnice. 2 boda

Stoga je $MA \perp NC$, te iz pravouglog trougla AMC dobijamo

$$\sphericalangle ACM = 90° - \sphericalangle AMC = 90° - (90° - \alpha) = \alpha.$$

1 bod

Sada vidimo da su trouglovi MCN i MND slični jer su im odgovarajući uglovi jednaki. ($\sphericalangle MCN = \sphericalangle MND = \alpha, \sphericalangle NMC = \sphericalangle DMN = 90°$) 2 boda

Dakle, vrijedi jednakost

$$\frac{|MC|}{|MN|} = \frac{|MN|}{|MD|},$$

koja je ekvivalentna sa 3 boda

$$|MC| \cdot |MD| = |MN|^2.$$

1 bod

□

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 16. 03. 2019.

III razred

Zadatak III.1 (10 bodova)**:** Riješiti jednačinu

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x &= 5 \cdot 36^x \\
3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} &= 5 \cdot 3^{2x} 2^{2x} \quad \Big| : 3^{2x} 2^{2x} \\
3 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} + 2 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} &= 5 \\
3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} &= 5 \\
3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]^2 + 2 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]^{-2} &= 5
\end{aligned}$$

4 boda

Uvođenjem smjene $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ dobijamo jednačinu $3t^2 + 2t^{-2} = 5$.

Množenjem sa t^2 dobijamo $3t^4 - 5t^2 + 2 = 0$.

Uvedimo smjenu $t^2 = s$. Dobijamo

$$3s^2 - 5s + 2 = 0.$$

2 boda

Rješenja ove jednačine su

$s_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$, tj. $s_1 = 1$ i $s_2 = \frac{2}{3}$.

Za $s_1 = 1$ imamo $t^2 = 1$, tj. $t_1 = 1$ i $t_2 = -1$. Zbog $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ imamo da t ne može biti negativno. Stoga za $t_1 = 1$ imamo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, tj. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ pa je $x = 0$.

Za $s_2 = \frac{2}{3}$ imamo $t^2 = \frac{2}{3}$, tj. $t_1 = +\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ i $t_2 = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Zbog $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ imamo da t ne može biti negativno. Stoga za $t_1 = \frac{2}{3}$ imamo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, tj. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ pa je $x = \frac{1}{2}$.

Dakle, rješenja su $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{1}{2}$. 4 boda

□

Zadatak III.2 (10 bodova)**:** Odrediti realan broj p tako da $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ budu korjeni kvadratne jednačine $x^2 - px - \sqrt{3} = 0$, ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje. Kako su $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ realni korjeni, diskriminanta date jednačine mora biti veća ili jednaka od nule, tj.

$D = p^2 + 4\sqrt{3} \geq 0.$ 2 boda

Prema Vietovim formulama iz jednačine $x^2 - px - \sqrt{3} = 0$, stavljajući da su $x_1 = \operatorname{tg}\alpha$ i $x_2 = \operatorname{tg}\beta$ njeni korjeni, dobijamo $x_1 + x_2 = p$ i $x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{3}$, tj. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = p$ i $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$. 2 boda

S obzirom da je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ vrijedi $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, odnosno 2 boda

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \sqrt{3}.$$

2 boda

Sada je

$$\frac{p}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

pa je

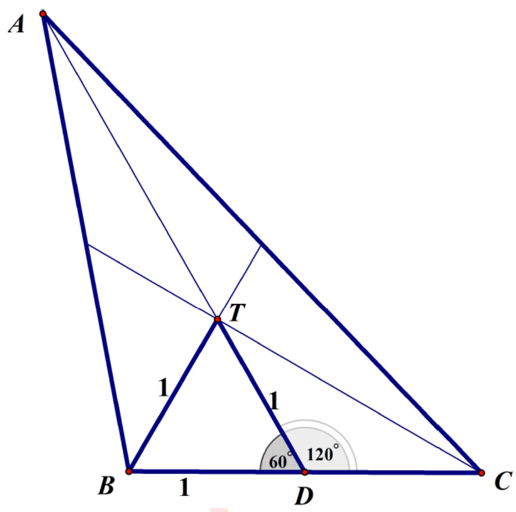
$$p = 3 + \sqrt{3}.$$

2 boda

□

Zadatak III.3 (15 bodova)**:** Tačka T je težište trougla ABC, a tačka D se nalazi na polovici stranice BC. Ako je dužina stranice jednakostraničnog trougla BDT jednaka 1 cm, odrediti dužine stranica trougla ABC i poluprečnik opisane kružnice trougla ABC.

Rješenje.



2 boda

Kako je D središte stranice $\overline{BC}$, njezina je dužina $|BC| = 2 \cdot 1 = 2\,\text{cm}$. 1 bod

Tačka T je težište trougla ABC, pa je $|TD| = \dfrac{1}{3}|AD|$, odnosno $|AD| = 3\,\text{cm}$. 1 bod

Trougao BDT je jednakostraničan, pa je $\sphericalangle BDT = 60°$, a $\sphericalangle CDT = 120°$. 1 bod

Primjenimo kosinusnu teoremu na trougao BDA.

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 - 2|BD| \cdot |AD| \cos 60^\circ \\
|AB|^2 &= 1 + 9 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7 \\
|AB| &= \sqrt{7}\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

3 bod

Primjenimo kosinusnu teoremu na trougao CDA

$$
\begin{aligned}
|AC|^2 &= |CD|^2 + |AD|^2 - 2|CD| \cdot |AD| \cos 120^\circ \\
|AC|^2 &= 1 + 9 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 13 \\
|AC| &= \sqrt{13}\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

2 bod

Površina trougla ABC računamo kao dvostruku površinu trougla ADC jer trouglovi ADC i ADB imaju istu osnovicu ($|BD| = |DC|$) i visinu na tu osnovicu.

$$P = 2\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |AD| \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

3 boda

Poluprečnik opisane kružnice je

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{2\sqrt{7}\sqrt{13}}{4\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{91}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{273}}{9}\ \mathrm{cm}.$$

$\square$ 2 boda

Zadatak III.4 (15 bodova)**:** Riješi nejednačinu

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(16x) < 1.$$

Rješenje. Da bi nejednačina imala smisla mora biti

$$x > 0,\ x \neq 1 \text{ i } x \neq \frac{1}{2}.$$

2 boda

Sada imamo

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2(2x)} \cdot \log_2(16x) < 1.$$
$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1+\log_2 x} \cdot (4+\log_2 x) < 1.$$

Uvođenjem smjene $\log_2 x = t$ dobijamo

$$\frac{4+t}{t(1+t)} < 1$$

$$\frac{4-t^2}{t(1+t)} < 0.$$

6 bodova

Prikažimo tabelu znakova za prethodni izraz. Imamo

t	$-\infty$	-2		-1		0		2	$+\infty$
$2-t$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2+t$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
t	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1+t$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{4-t^2}{t(1+t)}$	$-$	0	$+$	/	$-$	/	$+$	0	$-$

Vidimo da je rješenje ove nejednačine

$$t \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty).$$

4 boda

Konačno je

$$x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (4, +\infty).$$

□ 3 boda

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 16. 03. 2019.

IV razred

Zadatak IV.1 (10 bodova)**:** Za kompleksan broj z vrijedi

$$\arg(z+3) = \frac{\pi}{3}.$$

Odrediti najmanju moguću vrijednost $|z|$.

Rješenje. Kompleksan broj $z+3$ nalazi se na pravoj p kompleksne ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i sa nenegativnim dijelom realne ose zaklapa ugao $\frac{\pi}{3}$. 2 boda

Samim tim, kompleksan broj z nalazi se na pravoj q koja je paralelna sa p i sadrži tačku -3, pa je minimalna vrijednost broja $|z|$ rastojanje između prave q i koordinatnog početka. 3 boda

Prava q je zadana jednačinom

$$y = (x+3)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}(x+3) = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}.$$

3 boda

Koristeći formulu za udaljenost tačke $(0,0)$ od prave $\sqrt{3}x - y + 3\sqrt{3} = 0$ imamo

$$d = \frac{|\sqrt{3}\cdot 0 - 0 + 3\sqrt{3}|}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2 boda

Drugo rješenje:

Neka je $z = a + ib$. Tada je $z + 3 = a + 3 + ib$. Sada je

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} arg(z+3) = \frac{b}{a+3}.$$

Odavde je $\frac{b}{a+3} = \sqrt{3}$ pa je $b = \sqrt{3}(a+3)$. 4 boda

Odredimo vrijedost od $|z|$. Imamo

$$|z| = \sqrt{a^2 + [\sqrt{3}(a+3)]^2} = \sqrt{4a^2 + 18a + 27}.$$

3 boda

Ovaj izraz ima najmanju vrijednost u tjemenu parabole $4a^2 + 18a + 27$ i ta vrijednost je

$$\sqrt{-\frac{18^2 - 4\cdot 4\cdot 27}{4\cdot 4}} = \sqrt{\frac{108}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3 boda

$\square$

Zadatak IV.2 (10 bodova)**:** Dokazati da sljedeća jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve n.

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}.$$

Rješenje. Zadanu jednakost dokazujemo matematičkom indukcijom. Provjerimo tvrdnju za $n = 1$.

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{(1+1)!-1}{(1+1)!}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$. 1 bod

Pretpostavimo da zadana jednakost vrijedi za neki proizvoljan broj n, te dokažimo da tada vrijedi i za njegovog sljedbenika $n + 1$.

Treba dokazati da je

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}.$$

2 boda

Koristeći prepostavku indukcije, lijevu stranu posljednje jednakosti možemo pisati u obliku:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}&=\\ &=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=\\ &=\frac{(n+2)(n+1)!-(n+2)+n+1}{(n+2)!}=\\ &=\frac{(n+2)(n+1)!-1}{(n+2)!}=\\ &=\frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

6 bodova

Kako je tvrdnja tačna za $n = 1$ i iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za n, ona vrijedi i za $n + 1$, data tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. 1 bod

$\square$

Zadatak IV.3 (15 bodova)**:** Realni brojevi x, y i z su uzastopni članovi aritmetičkog niza. Ako su brojevi $\cos^2 x$, $\cos^2 y$ i $\cos^2 z$ međusobno različiti uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza, odrediti sve moguće vrijednosti od y.

Rješenje. Kako su x, y i z uzastopni članovi aritmetičkog niza, postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $x = y - t$ i $z = y + t$. 1 bod

Uslov da su $\cos^2 x$, $\cos^2 y$ i $\cos^2 z$ uzastopni članovi aritmetičkog niza možemo zapisati u obliku

$$\cos^2 x + \cos^2 z = 2\cos^2 y.$$

2 boda

Sada redom imamo

$$\cos^2(y-t) + \cos^2(y+t) = 2\cos^2 y$$
$$(\cos y \cos t + \sin y \sin t)^2 + (\cos y \cos t - \sin y \sin t)^2 = 2\cos^2 y$$
$$\cos^2 y \cos^2 t + 2\sin y \cos y \sin t \cos t + \sin^2 y \sin^2 t + \cos^2 y \cos^2 t - 2\sin y \cos y \sin t \cos t + \sin^2 y \sin^2 t = 2\cos^2 y$$
$$\cos^2 y \cos^2 t + \sin^2 y \sin^2 t = \cos^2 y$$

3 boda

odakle dalje slijedi

$$\sin^2 y \sin^2 t = \cos^2 y(1 - \cos^2 t)$$
$$\sin^2 y \sin^2 t = \cos^2 y \sin^2 t$$
$$\sin^2 t(\cos^2 y - \sin^2 y) = 0.$$

3 boda

Ovo je moguće jedino ako je $\sin t = 0$ ili $\cos y = \pm \sin y$.

Ako je $\sin t = 0$, onda je $t = k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. Međutim, tada je $x = y - k\pi$, $z = y + k\pi$ i stoga

$$\cos^2 x = \cos^2 z = \cos^2 y.$$

Dakle, ovaj slučaj otpada. 3 boda

Zato je $\cos y = \pm \sin y$, odnosno $\operatorname{tg} y = \pm 1$. Konačno,

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

□ 3 boda

Zadatak IV.4 (15 bodova)**:** Neka je $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava uslov

$$2f(\sin x)+3f(\cos x)=\sin x,\ \text{ za } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

a) Naći $f(0)$.

b) Odrediti funkciju f.

Rješenje.

a) Za $x=0$ je

$$2f(0)+3f(1)=0,$$

2 boda

a za $x=\frac{\pi}{2}$ je

$$2f(1)+3f(0)=1.$$

2 boda

Rješavanjem ovog sistema dobija se $f(0)=\frac{3}{5}$. 2 boda

b) Za $t=\sin x$ je

$$2f(t)+3f(\sqrt{1-t^2})=t,$$

3 boda

a za $t=\cos x$ je

$$2f(\sqrt{1-t^2})+3f(t)=\sqrt{1-t^2}.$$

3 boda

Rješavanjem ovog sistema dobija se

$$f(t)=\frac{3\sqrt{1-t^2}-2t}{5}.$$

3 boda

□