Udruženje matematičara "Algoritam"
(http://umalgoritam.ba)
mail: umalgoritam@gmail.com

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz matematike

Školska 2020/21. godina

Zadatke pripremili: mr.sc. Sead Peco, mr.sc. Elmir Čatrnja

Jablanica – Konjic – Mostar, 27. 03. 2021.

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Jablanica – Konjic – Mostar, 27. 03. 2021.

I razred

Zadatak I.1 (10 bodova)**:** Riješi jednačinu

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right) = 2021.$$

Rješenje. Jednačinu rješavamo uz uslov $x \neq 1$ i $x \neq -1$. 1 bod

Izraz u zagradi svedemo na najmanji zajednički nazivnik i izvršimo naznačene operacije:

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right) = 2021$$

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3(x-1)} - \frac{3x-1}{4(x+1)} + \frac{x^2-7x+14}{12(x-1)(x+1)}\right) = 2021$$

2 boda

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{4(2x-3)(x+1)-3(3x-1)(x-1)+x^2-7x+14}{12(x-1)(x+1)}\right) = 2021$$

2 boda

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{x-1}{12(x-1)(x+1)}\right) = 2021$$

$$\frac{x+3}{12(x+1)} \left(\frac{12(x-1)(x+1)}{x-1}\right) = 2021$$

3 boda

$$x+3 = 2021$$

$$x = 2018.$$

2 boda

□

Zadatak I.2 (10 bodova)**:** Razlika dva neparna broja je djeljiva sa 5. Kojom cifrom se završava razlika kubova tih brojeva?

Rješenje. Razlika dva neparna broja a i b djeljiva je sa 2, jer

$$a - b = (2n - 1) - (2k - 1) = 2(n - k).$$

3 boda

Prema uslovu zadataka je razlika dijeljiva i sa 5, pa je $a-b$ djeljivo sa 10, tj. $a-b = 10M$. 3 boda

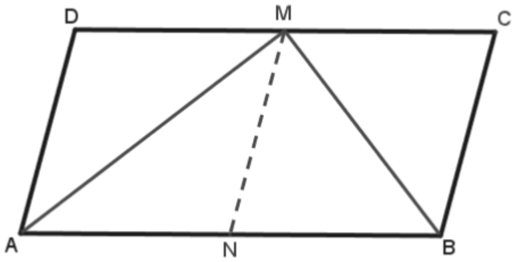
Sada slijedi da je

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 10M(a^2 + ab + b^2),$$

pa se razlika kubova tih brojeva završava sa nulom. □ 4 boda

Zadatak I.3 (15 bodova)**:** Neka je $ABCD$ paralelogram, a M sredina stranice DC. Ako M leži na simetrali ugla DAB, odrediti vrijednost ugla AMB.

Rješenje.



2 boda

Neka je $\sphericalangle BAD = \alpha$. Pošto je $DC \| AB$ vrijedi

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle AMD = \sphericalangle DAM = \frac{\alpha}{2},$$

pa je trougao DAM jednakokraki i $DM = DA$ i $\sphericalangle DMA = \frac{\alpha}{2}$. 3 boda

Međutim, tada je i trougao MCB jednakokraki jer je

$$MC = MD = DA = BC$$

2 bod

pa je, zbog $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BCD = \sphericalangle DAB = \alpha$,

$$\sphericalangle CMB = \sphericalangle CBM = \frac{180^\circ - \sphericalangle BCM}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Sada je 5 boda

$$\sphericalangle AMB = 180^\circ - \sphericalangle AMD - \sphericalangle CMB = 90^\circ.$$

3 boda

□

Zadatak I.4 (15 bodova)**:** Gargamel je uhvatio N Štrumpfova i raspodijelio ih u tri vreće. Kad je Velikog Štrumpfa iz prve vreće premjestio u drugu, Mrguda iz druge u treću, a Štrumpfetu iz treće u prvu, prosječna visina Štrumpfova u prvoj vreći se smanjila za 8 milimetara, a prosječne visine Štrumpfova u drugoj i trećoj vreći su se povećale redom za 5 milimetara i 8 milimetara.

Ako je u prvoj vreći bilo devet Štrumpfova, odredi N.

Rješenje. Neka je u drugoj vreći bilo K Štrumfova, a u trećoj vreći L Štrumpfova. Neka su x, y i z redom visine Velikog Štrumpfa, Mrguda i Štrumfete.

Ako su visine Štrumpfova u prvoj vreći $x, x_2, \ldots, x_9$, onda je

$$\frac{x + x_2 + \cdots + x_9}{9} = 8 + \frac{z + x_2 + \cdots + x_9}{9},$$

tj.

$$\frac{x}{9} = 8 + \frac{z}{9}.$$

3 boda

Analogno, posmatrajući prosjek u drugoj i trećoj vreći dobijamo

$$\frac{x}{K} = 5 + \frac{y}{K},$$

$$\frac{y}{L} = 8 + \frac{z}{L}.$$

2 boda

Dakle, dobijamo sistem

$$\begin{aligned} x &= 72 + z, \\ 5K + y &= x, \\ 8L + z &= y. \end{aligned}$$

Saberemo li ove tri jednačine dobijamo

$$72 = 5K + 8L.$$

4 boda

Pošto su K i L prirodni brojevi, zaključujemo da 8 dijeli K. 2 boda

Nije moguće da je $K \geq 16$ jer bi tada L bio negativan, niti $K = 0$ jer druga vreća nije prazna (u njoj je na početku bio Mrgud). Dakle, $K = 8$. 2 boda

Sada je $L = \frac{72-5K}{8} = \frac{72-40}{8} = 4$. Pošto vrijedi $N = K + L + 9$, slijedi da je $N = 21$. $\square$ 2 boda

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Jablanica – Konjic – Mostar, 27. 03. 2021.

II razred

Zadatak II.1 (10 bodova)**:** Odrediti kompleksan broj z tako da vrijedi

$$|z+2| = |1-\overline{z}| \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \frac{1}{13}.$$

Rješenje. Neka je traženi kompleksan broj $z = x+iy$. Iz prve jednačine $|z+2| = |1-\overline{z}|$ imamo

$$(x+2)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2,$$

tj.

$$x = -\frac{1}{2}.$$

3 boda

Iz druge jednačine imamo,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x+yi}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2x+3y}{13} - \frac{3x-2y}{13}i\right) = \frac{2x+3y}{13},$$

3 boda

pa je

$$\frac{2x+3y}{13} = \frac{1}{13},$$

tj.

$$2x+3y = 1.$$

2 boda

Sada iz $x = -\frac{1}{2}$ i $2x+3y=1$ slijedi da je $y = \frac{2}{3}$. 1 bod

Dakle, traženi kompleksan broj je $z = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$. □ 1 bod

Zadatak II.2 (10 bodova)**:** Data je jednačina $(m-2)x^2 - 2(m+1)x = -m-3$. Odrediti parametar m tako da zbir kvadrata njenih rješenja bude 52.

Rješenje. Neka su x_1 i x_2 rješenja jednačne $(m-2)x^2 - 2(m+1)x = -m-3$.

Iz uslova zadataka je $x_1^2 + x_2^2 = 52$, odnosno

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 52.$$

4 boda

Iz Vietovih formula je $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m-2}$ i $x_1x_2 = \frac{m+3}{m-2}$. 2 boda

Sada imamo da je

$$\left(\frac{2(m+1)}{m-2}\right)^2 - 2\frac{m+3}{m-2} = 52,$$

tj. nakon sređivanja

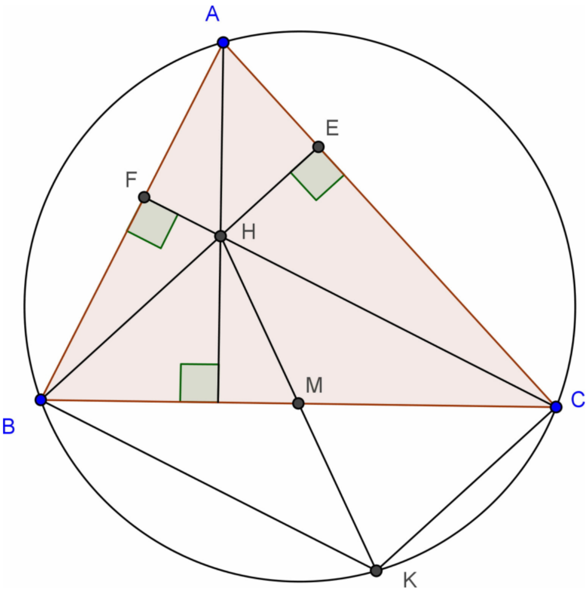
$$25m^2 - 107m + 96 = 0.$$

3 boda

Rješenja ove jednačine su $m_1 = \frac{32}{25}$ i $m_2 = 3$. $\square$ 1 bod

Zadatak II.3 (15 bodova)**:** Neka je dat oštrougli trougao $\triangle ABC$ sa ortocentrom H. Tačka M je središte duži BC. Dokazati da tačka K, koja je simetrična tački H u odnosu na tačku M, leži na kružnici opisanoj oko trougla $\triangle ABC$.

Rješenje.



2 boda

Neka je tačka E na stranici AC podnožje visine iz vrha B, a tačka F na stranici AB podnožje visine iz vrha C. Pošto je trougao ABC oštrougli, ortocentar H se nalazi u unutrašnjosti tog trougla. Očito je onda

$$\measuredangle HFA + \measuredangle HEA = 180^\circ,$$

pa je četverougao $HEAF$ tetivni. 3 boda

Zbog toga je

$$\measuredangle BHC = \measuredangle EHF = 180^\circ - \measuredangle EAF = 180^\circ - \measuredangle CAB.$$

2 boda

Prema uslovu zadatka imamo da je $MB = MC$ i $HM = KM$, pa je četverougao $HBKC$ paralelogram (jer mu se dijagonale polove). 2 boda

Iz toga slijedi da je

$$\measuredangle BHC = \measuredangle BKC.$$

1 bod

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi da je

$$\measuredangle BKC = 180^\circ - \measuredangle CAB,$$

što znači da je i četverougao $ABKC$ tetivni. 3 boda

Iz toga slijedi da K leži na kružnici opisanoj oko trougla ABC. $\square$ 2 boda

Zadatak II.4 (15 bodova)**:** Neka su a, b i c realni brojevi, takvi da jednačine

$$2ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{i} \qquad -2ax^2 + bx + c = 0$$

imaju realna rješenja.

Ako je α bilo koje rješenje prve jednačine, β bilo koje rješenje druge jednačine, dokazati da interval $[\alpha, \beta]$ sadrži bar jedno rješenje jednačine $ax^2 + bx + c = 0$.

Rješenje. Prema uslovu zadatka je $2a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, pa je $b\alpha + c = -2a\alpha^2$.

Također je, $-2a\beta^2 + b\beta + c = 0$, pa je $b\beta + c = 2a\beta^2$. 4 boda

Za dokaz tvrdnje dovoljno je utvditi da $f(\alpha)f(\beta) < 0$, pri čemu je $f(x) = ax^2 + bx + c$. 6 boda

Zaista,

$$f(\alpha)f(\beta) = (a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) = (a\alpha^2 - 2a\alpha^2)(a\beta^2 + 2a\beta^2) = -3a^2\alpha^2\beta^2 < 0,$$

što smo i trebali dokazati. 5 boda

□

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Jablanica – Konjic – Mostar, 27. 03. 2021.

III razred

Zadatak III.1 (10 bodova)**:** Naći sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}^+$ za koje jednačina

$$\frac{\log kx}{\log(x+1)} = 2$$

ima tačno jedno rješenje.

Rješenje. Odredimo prvo definiciono prodručje.

$$kx > 0, \log(x+1) \neq 0, x+1 > 0 \Leftrightarrow k > 0, x > 0, x > -1,$$

tj.

$$k > 0, x > 0.$$

2 boda

Dalje, imamo

$$\begin{aligned} \frac{\log kx}{\log(x+1)} = 2 &\Leftrightarrow \log kx = 2 \cdot \log(x+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log kx = \log(x+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow kx = (x+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0. \end{aligned}$$

4 boda

Dobijena jednačina ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $D = 0$, tj.

$$D = (2-k)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k(k-4) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 4.$$

2 boda

Zbog definicionog područja otpada $k = 0$, a za $k = 4$ provjerom imamo

$$\log 4x = \log(x+1)^2 \iff 4x = (x+1)^2 \iff (x-1)^2 = 0,$$

tj. $x = 1$ je jedinstveno rješenje. 1 bod

Dakle, jedino za $k = 4$ data jednačina ima jedinstveno rješenje. 1 bod

□

Zadatak III.2 (10 bodova)**:** Odrediti sve realne brojeve x i y za koje vrijedi

$$5\cos^2 y + x^2 - 2x\cos y - 8x + 20 = 0.$$

Rješenje. Riješimo datu jednačinu kao kvadratnu jednačino po x

$$x^2 - 2(\cos y + 4)x + 20 + 5\cos^2 y = 0.$$

2 boda

$$x_{1,2} = \frac{2(\cos y + 4) \pm \sqrt{(2(\cos y + 4))^2 - 4(20 + 5\cos^2 y)}}{2},$$

tj. nakon sređivanja

$$x_{1,2} = \cos y + 4 \pm \sqrt{-(2\cos y - 2)^2}.$$

4 boda

Rješenje će biti realno samo ako je diskriminanta jednaka nuli, tj. $\cos y = 1$. 2 boda

Tada je $x = 5$. 1 bod

Dakle, rješenje je $x = 5$, $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

□

Zadatak III.3 (15 bodova)**:** Odrediti broj $t \in \mathbb{R}$ takav da je $f(t) = t$ ako je

$$f(x) = 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 4^{x+\sqrt{x^2-2}} + 6 + x.$$

Rješenje. Odredimo prvo definiciono područje.

$$x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$$

2 boda

Dalje je jednačina $f(t) = t$ ekvivalentna sa

$$5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 4^{x+\sqrt{x^2-2}} + 6 = 0,$$

tj.

$$5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} \cdot 2^{-1} - 2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} + 6 = 0.$$

Smjenom,

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = z > 0,$$

4 boda

i množenjem jednačine sa 2 dobijamo

$$2z^2 - 5z - 12 = 0.$$

3 boda

Rješenja posljednje jednačine su $z_1 = -\frac{3}{2}$ i $z_2 = 4$. 1 bod

Rješenje z_1 je negativno, pa ga odbacujemo. 1 bod

Sada za $z = 4$ imamo

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4 = 2^2,$$

pa je

$$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2,$$

tj.

$$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x.$$

Kvadriranjem dobijamo

$$x^2 - 2 = (2 - x)^2.$$

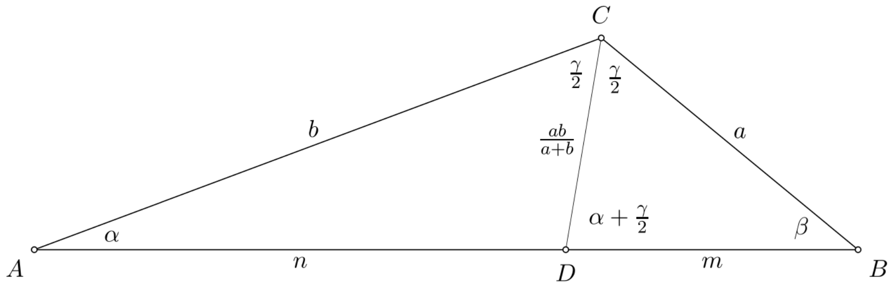
Rješenje ove jednačine je $x = \frac{3}{2}$.

Dakle, traženi broj t je jednak $\frac{3}{2}$. 4 boda

□

Zadatak III.4 (15 bodova)**:** U trouglu ABC simetrala ugla kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u tački D. Neka su a i b redom dužine stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Ako vrijedi $|CD| = \frac{ab}{a+b}$, odrediti $\sphericalangle ACB$.

Rješenje. Neka su α, β i γ uglovi kod vrhova A, B i C u trouglu ABC, respektivno.



2 boda

Neka je $n = |AD|$, $m = |BD|$ i $c = |AB|$. Prema pravilu o simetrali ugla vrijedi $m : n = a : b$. Pošto je $m + n = c$, imamo

$$m = \frac{ac}{a+b}.$$

2 boda

Prema kosinusnoj teoremi primijenjenoj na trougao BCD imamo

$$\frac{a^2b^2}{(a+b)^2} = a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{2a^2c}{a+b}\cos\beta,$$

tj.

$$\cos\beta = \frac{(a+b)^2 + c^2 - b^2}{2c(a+b)} = \frac{a^2 + 2ab + c^2}{2c(a+b)}.$$

4 boda

Budući da prema kosinusnoj teoremi primijenjenoj na trougao ABC vrijedi

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

slijedi

$$\frac{a^2 + 2ab + c^2}{2c(a+b)} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Sređivanjem dobijamo $a^2 + b^2 + ab = c^2$. 4 boda

Prema kosinusnoj teoremi primijenjenoj na trougao ABC vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

pa iz posljednje jednakosti slijedi $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$. 2 boda

Dakle, $\gamma = 120°$. □ 1 bod

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Jablanica – Konjic – Mostar, 27. 03. 2021.

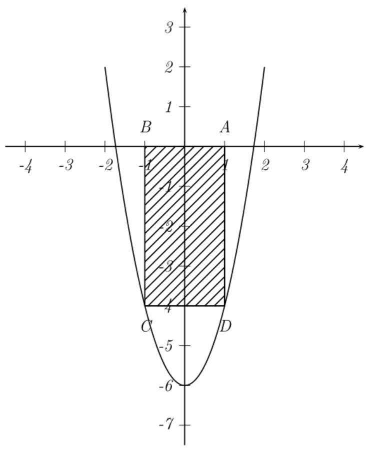
IV razred

Zadatak IV.1 (10 bodova)**:** U figuru ograničenu lukom krive $2x^2 - y = 6$ i osom Ox upisan je pravougaonik tako da su mu dva tjemena na osi Ox. Odrediti maksimalnu površinu takvog pravougaonika.

Rješenje. Tjemena pravougaonika će imati sljedeće koordinate

$$A(a, 0), B(-a, 0), C(-a, 2a^2 - 6), D(a, 2a^2 - 6),$$

pri čemu je $0 < a < \sqrt{3}$.



2 boda

Dužine stranica pravougaonika su

$$AB = CD = 2a,$$

$$AD = BC = \sqrt{(a-a)^2 + (0 - 2a^2 + 6)^2} = \left|-2a^2 + 6\right| = -2a^2 + 6,$$

pa je njegova provršina

$$P(a) = 2a(-2a^2 + 6) = -4a^3 + 12a.$$

3 boda

Kako je $P'(a) = -12a^2 + 12$, funcija površine pravougaonika može imati extreme u tačkama $a = \pm 1$, što zbog $a > 0$ povlači da je $a = 1$. 3 boda

Za $a = 1$ funkcija površine dostiže svoj maksimum, jer je $P''(a) = -24a$, tj. $P''(1) = -24 < 0$. 1 bod

Taj maksimum iznosi

$$P_{\max} = P(1) = -4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1 = 8.$$

□ 1 bod

Zadatak IV.2 (10 bodova)**:** Četiri broja čine geometrijski niz. Njihovi logaritmi po bazi 3 čine aritmetički niz čija je razlika 1, a zbir 18. Odrediti te brojeve.

Rješenje. Neka su a, b, c, d traženi brojevi. Iz uslova zadatka slijedi

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c},$$

2 boda

$$\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c + \log_3 d = 18.$$

Također, imamo

$$\log_3 b = \log_3 a + 1,$$

$$\log_3 c = \log_3 b + 1 = \log_3 a + 2,$$

$$\log_3 d = \log_3 c + 1 = \log_3 a + 3,$$

pa uvrštavajući ovo u jednakost

3 boda

$$\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c + \log_3 d = 18,$$

dobijamo

$$4 \log_3 a + 1 + 2 + 3 = 18.$$

Odavde je

$$\log_3 a = 3,$$

pa je $a = 3^3 = 27$.

3 boda

Konačno imamo

$$\log_3 b = 3 + 1 = 4, \text{ pa je } b = 3^4 = 81,$$

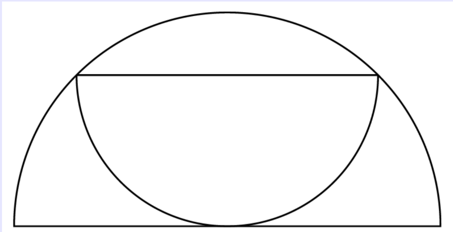
$$\log_3 c = 4 + 1 = 5, \text{ pa je } c = 3^5 = 243,$$

$$\log_3 d = 5 + 1 = 6, \text{ pa je } d = 3^6 = 729.$$

Dakle, traženi brojevi su $27, 81, 243, 729$. □

2 boda

Zadatak IV.3 (15 bodova)**:** Za polukrug kažemo da je pravilno smješten u veći polukrug ako su im prečnici paralelni, krajevi prečnika manjeg polukruga leže na polukružnici većeg polukruga i polukružnica manjeg polukruga dodiruje prečnik većeg polukruga.



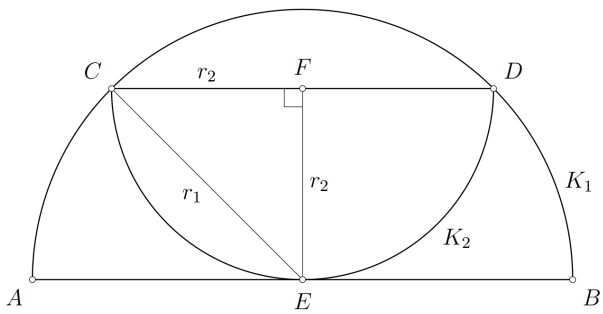
Dat je niz polukrugova K_1, K_2, K_3, $\ldots$, pri čemu je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, polukrug K_{n+1} pravilno smješten u polukrug K_n. Područje koje pripada polukrugu K_n i ne pripada polukrugu K_{n+1} obojeno je plavom ako je n neparan, a žutom bojom ako je n paran broj. Poluprečnik polukruga K_1 iznosi 1. Odrediti ukupnu površinu obojenu plavom bojom.

Rješenje. Neka je za $n \in \mathbb{N}$ poluprečnik polukruga K_n jednak r_n i njegova površina jednaka P_n.

Neka je AB prečnik polukruga K_1, CD prečnik polukruga K_2, te neka je F središte duži CD. Neka je tačka E tačka dodira polukružnice K_2 i prave AB.

Tada je EF poluprečnik kružnice K_2, te je okomit na tangentu AB. Budući da su AB i CD paralelni, slijedi da su prave CD i EF također okomite. 2 boda

Budući da je F središte duži CD, prava EF je simetrala te duži. Središte duži AB je središte polukružnice na kojoj se nalaze tačke C i D, pa i ono leži na pravcu EF. Zaključujemo da je E upravo središte duži AB. 2 boda



Prema pokazanom, trougao EFC je jednakokraki pravougli trougao s pravim uglom pri vrhu F. Njegove katete su dužine $|FE| = |FC| = r_2$ i hipotenuza je dužine $|EC| = r_1$. 2 boda

Iz Pitagorine teoreme za taj trougao zaključujemo da je $r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}r_1$.

Analogno je $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$, odnosno

$$r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

2 boda

Dalje, dobijamo da je

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot r_n^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \pi = \frac{\pi}{2^n}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

1 bod

Površinu prekrivenu plavom bojom možemo izračunati tako da prvo ubrojimo površinu plave P_1, pa od nje oduzmemo površinu žute P_2, pa njoj pribrojimo površinu plave P_3, pa opet oduzmemo površinu žute P_3, itd. Dakle, tražimo

$$P = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \dots$$

Uvrstimo li izraze za P_n slijedi

2 boda

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} + \dots = \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

4 boda

U predzadnjem koraku smo koristili formulu za sumu geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ za } q = -\frac{1}{2} \in (-1, 1).$$

$\square$

Zadatak IV.4 (15 bodova)**:** Dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{1010}(-3)^k\binom{2020}{2k}=-2^{2019}.$$

Rješenje. Primijetimo da je prema binomnom obrascu

$$(1+i\sqrt{3})^{2020}=\sum_{k=0}^{2020}\binom{2020}{k}1^{2020-k}(i\sqrt{3})^k=\sum_{k=0}^{2020}\binom{2020}{k}(i\sqrt{3})^k.$$

5 bodova

Sumu možemo rastaviti po parnim i neparnim indeksima. Dobijamo

$$(1+i\sqrt{3})^{2020}=\sum_{k=0}^{1010}\binom{2020}{2k}(i\sqrt{3})^{2k}+\sum_{k=0}^{1009}\binom{2020}{2k+1}(i\sqrt{3})^{2k+1},$$

tj.

$$(1+i\sqrt{3})^{2020}=\sum_{k=0}^{1010}\binom{2020}{2k}(-3)^k+i\sqrt{3}\sum_{k=0}^{1009}\binom{2020}{2k+1}(-3)^k.$$

3 boda

Odavde vidimo da je tražena suma zapravo realni dio broja $z=(1+i\sqrt{3})^{2020}$. 2 boda

Pošto je $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, slijedi da je

$$\begin{aligned}
z&=2^{2020}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2020}=\\
&=2^{2020}\left(\cos\frac{2020\pi}{3}+i\sin\frac{2020\pi}{3}\right)=\\
&=2^{2020}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\\
&=2^{2020}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\\
&=-2^{2019}-i2^{2019}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

4 bodova

Dakle,

$$-2^{2019}-i2^{2019}\sqrt{3}=\sum_{k=0}^{1010}\binom{2020}{2k}(-3)^k+i\sqrt{3}\sum_{k=0}^{1009}\binom{2020}{2k+1}(-3)^k,$$

pa je

$$\sum_{k=0}^{1010}\binom{2020}{2k}(-3)^k=-2^{2019}.$$

□ 1 bod