Takmičenje učenika osnovnih škola HNK iz MATEMATIKE
Mostar, 22. mart 2025. godine

Rješenja za
VII razred

1. Nađi vrijednost izraza $A=\frac{x+2024}{2025+x}$, ako je x$\in Z$ najmanja vrijednost u skupu rješenja nejednačine:

$$(-275-3x)\cdot 7+89-(128-x)<-2\cdot(17+7x)-(5x-87)+8$$

Rješenje:

$$(-275-3x)\cdot 7+89-(128-x)<-2\cdot(17+7x)-(5x-87)+8$$
$$-1925-21x+89-128+x<-34-14x-5x+87+8$$

.... 3 boda

$$-20x-1964<61-19x$$
$$-20x+19x<61+1964$$

.... 2 boda

$$-x<2025/\cdot(-1)$$
$$x>-2025$$

.... 2 boda

$$x\in\{-2024,-2023,-2022,-2021,\ldots\}$$

....1 bod

$$A=\frac{x+2024}{2025+x}\Rightarrow A=\frac{-2024+2024}{2025+(-2024)}\Rightarrow A=\frac{0}{1}\Rightarrow A=0$$

.... 2 boda

(ukupno: 10 bodova)

2. Sportista je loptu, patike i trenerku platio 224 KM. Patike su skuplje od lopte 21 KM, a lopta i patike zajedno su 18 KM jeftinije od trenerke. Koliko košta lopta, koliko patike, a koliko trenerka?

Rješenje:

- Neka je cijena lopte x KM
- Tada patike koštaju x+21 KM
- Trenerka tada košta x+(x+21)+18
- Prema tome možemo formirati jednačinu:

$x+(x+21)+[x+(x+21)+18]=224$ ....zaključak i određivanje jednačine............5 bodova

$x+x+21+2x+21+18=224$

$4x+60=224$

$4x=164$

$x=\frac{164}{4}$ ....sređivanje jednačine... 2 boda

$x=41$ ....određivanje jednog rješenja .... 1 bod

Odgovor:

- Znači, cijena lopte je 41 KM
- Tada patike koštaju x+21 = 41+21=62 KM
- Trenerka tada košta x+(x+21)+18 =41+(41+21)+18=121 KM

..................određivanje preostala dva rješenja.............. 2 boda

(ukupno: 10 bodova)

3. Ako se u oštrouglom trouglu ABC spoljašnji ugao kod vrha A poveća za 45°, a spoljašnji ugao kod vrha B smanji za 35°, tada se unutrašnji ugao kod vrha C tog trougla poveća za svoju petinu. Izračunati unutrašnji ugao kod vrha C.

Rješenje:

- Označimo sa $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ spoljašnje uglove trougla;
- Neka je dalje γ ugao kod vrha C
- Tada je: $\alpha_1 + \beta_1 = (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = 180^0 + \gamma$

.... određivanje veze između unutrašnjih i vanjskih uglova ....3 boda

- To znači: $\alpha_1 + \beta_1 = 180^0 + \gamma$

................određivanje relacije koja se koristi dalje u zadatku .... 2 boda

Prema uslovu zadatka imamo:

$$\alpha_1 + 45^0 + \beta_1 - 35^0 = 180^0 + \gamma + \frac{\gamma}{5}$$

..................postavljanje ispravne relacije............5 bodova

$$\alpha_1 + \beta_1 + 10^0 = 180^0 + \gamma + \frac{\gamma}{5}$$

$$180^0 + \gamma + 10^0 = 180^0 + \gamma + \frac{\gamma}{5}$$

$$10^0 = \frac{\gamma}{5} / \cdot 5$$

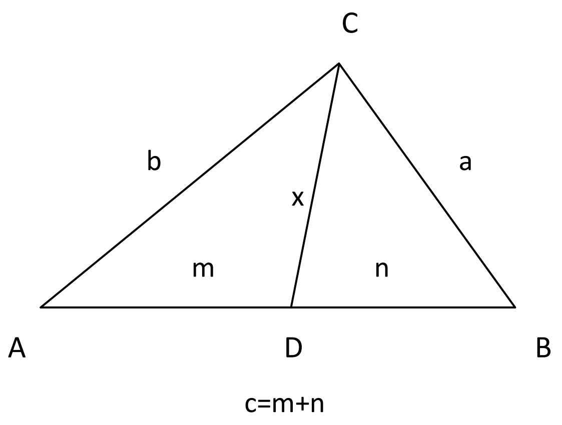
$$\gamma = 50^0$$

....određivanje traženog ugla..........................5 boda

(ukupno: 15 bodova)

4. Na stranici AB trougla ABC data je tačka D, tako da su obimi trouglova ABC, ADC i BCD redom 19 cm, 15 cm i 12 cm. Odredi dužinu duži CD.

Rješenje:



..............................slika................2 boda

u trouglu ABC neka je duž CD = x

- Sa slike uočavamo:

$$\Delta ABC : a+b+c=19$$
$$\Delta ADC : m+x+b=15$$
$$\Delta BCD : n+x+a=12$$

....određivanje relacija.................................. 3 boda

- Ako saberemo sve tri relacije na lijevoj strani jednakosti i sve tri vrijednosti na desnoj strani jednakosti, dobit ćemo:

- $a+b+c+m+x+b+n+x+a=46$

...................................određivanje veze između stranica........................... 5 bodova

- Kako je $m+n=c$ imamo da je: ....korištenje relacije.........................1 bod

$$2a+2b+2c+2x=46$$

.....................sređivanje i postavljanje relacije.......................2 boda

$$2\cdot(a+b+c)+2x=46$$
$$2\cdot 19+2x=46$$
$$2x=8$$
$$x=4$$

.................................rješenje i odgovor.................................. 2 boda

Odgovor: duž CD = x = 4 cm

(ukupno: 15 bodova)

Takmičenje učenika osnovnih škola HNK iz MATEMATIKE
Mostar, 22. mart 2025. godine

Rješenja za
VIII razred

1. Ako je $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, odredi koliko je $\left(x-2\sqrt{2}-1\right)^{2025}$.

Rješenje:

- Budući da je x zbir pozitivnih sabiraka (potkorijene veličine su nenegativni brojevi, pa je i zbir korijenova nenegativan), zaključujemo da je $x\geq 0$ (*)

- Prema tome imamo:

$$x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\ /^2$$
$$x^2=3-2\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}+3+2\sqrt{2}$$

...............ideja i ispravno kvadriranje............. 4 boda

$$x^2=6+2\cdot\sqrt{9+6\sqrt{2}-6\sqrt{2}-4\cdot 2}$$
$$x^2=6+2\cdot 1$$
$$x^2=8$$
$$x=\pm\sqrt{8}\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$$

......................određivanje rezultata............. 3 boda

- Kako vrijedi (*), onda je $x=2\sqrt{2}$ ......određivanje tačne vrijednosti broja „x“.......... 1 bod

- Tada je:

$$\left(x-2\sqrt{2}-1\right)^{2025}=\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-1\right)^{2025}=(-1)^{2025}=-1$$

....određivanje konačnog rezultata............ 2 boda

(ukupno: 10 bodova)

2. Zadana je jednačina $\frac{9x+4}{6}:\frac{3}{4}=p:3$

a) Riješi jednačinu po promjenljivoj x, smatrajući p poznatim brojem;

b) Odredi vrijednost p tako da bude $x=\frac{2}{9}$

c) Za koje će $p\in Z$ biti $0\le x\le 1$?

Rješenje:

a)

$$\frac{9x+4}{6}:\frac{3}{4}=p:3$$

$$3\cdot\frac{9x+4}{6}=\frac{3}{4}\cdot p$$

$$\frac{9x+4}{2}=\frac{3p}{4}/\cdot 4$$

$$18x+8=3p$$ .... sređivanje jednačine.......... 4 boda

$$18x=3p-8$$

$$x=\frac{3p-8}{18}$$ ....konačno rješenje.. 1 bod

b)

$$x=\frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{9}=\frac{3p-8}{18}/\cdot 18$$

$$4=3p-8$$

$$3p=12$$ .... sređivanje jednačine.......... 3 boda

$$p=\frac{12}{3}\Rightarrow p=4$$ ....konačno rješenje.. 1 bod

c) Iz uslova zadatka, imamo:

$$0\le x\le 1$$

$$0\le\frac{3p-8}{18}\le 1/\cdot 18$$

$$0\le 3p-8\le 18$$

$$8\le 3p\le 26/:3$$

$$\frac{8}{3}\le p\le\frac{26}{3}$$

$$2\frac{2}{3}\le p\le 8\frac{2}{3}$$ .... sređivanje nejednačine.......... 4 boda

Kako je $p\in Z$, onda je $p\in\{3,4,5,6,7,8\}$ ....određivanje rješenja .... 2 boda

(ukupno: 15 bodova)

3. Zbir četiri broja je 208. Ako se prvom broju doda 3 ili se drugom broju oduzme 3 ili treći broj pomnoži sa 3 ili četvrti broj podijel sa 3 dobije se uvijek isti broj. Odredi ta četiri broja

Rješenje:

- Neka su traženi brojevi x, y, z, t
- Prema uslovu zadatka imamo:

$x+y+z+t=208$ ....relacija..........................1 bod

- Također, po uslovu zadatka imamo da vrijedi:

$x+3=y-3=3z=\frac{t}{3}$ ....relacija..........................2 boda

Odavde izvodimo jednakosti:

$$y=x+6$$
$$z=\frac{x+3}{3}$$
$$t=3x+9$$

....veza između promjenljivih........................3 boda

Budući da je $x+y+z+t=208$ imamo dalje:

$$x+x+6+\frac{x+3}{3}+3x+9=208$$

...............................formiranje jednačine..........................2 boda

$$5x+15+\frac{x+3}{3}=208$$
$$5x+\frac{x+3}{3}=193/\cdot 3$$
$$15x+x+3=579$$
$$16x=576$$
$$x=\frac{576}{16}\Rightarrow x=36$$

....dobijanje jednogog rješenja..........................4 boda

$$y=x+6\Rightarrow y=36+6\Rightarrow y=42$$
$$z=\frac{x+3}{3}\Rightarrow z=\frac{36+3}{3}\Rightarrow z=13$$
$$t=3x+9\Rightarrow t=3\cdot 36+9\Rightarrow t=117$$

....konačan odgovor
sa ostalim rješenjima..............................3 boda

(ukupno: 15 bodova)

4. Kvadrat i pravougaonik čije su dimenzije stranica 8 cm i 6 cm imaju jednake površine. Izračunaj razliku njihovih dijagonala. (rezultate zaokružuj na dvije decimale).

Rješenje:

- Ako je P_1 površina pravougaonika, tada je:

$$P_1 = 8cm \cdot 6cm = 48cm^2$$

....određivanje površine ....1 bod

- Njegova dijagonala d_1 je:

$$d_1^{\,2} = a^2 + b^2$$
$$d_1^2 = 8^2 + 6^2$$
$$d_1^2 = 64 + 36$$
$$d_1 = \sqrt{100} \Rightarrow d_1 = 10cm$$

.........određivanje dijagonale pravougaonika.......................... 2 boda

- Označimo površinu kvadrata sa P_2, a njegovu dijagonalu sa d_2
- Iz uslova zadatka je $P_1 = P_2 = 48cm^2$, pa imamo:

$$P_2 = a^2 = 48cm^2$$

....................................zaključak .... 1 boda

$$a = \sqrt{48cm^2} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}cm$$

........................određivanje stranice kvadrata ....2 boda

- Dalje je dijagonala kvadrata :

$$d_2 = a\sqrt{2}$$
$$d_2 = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$
$$d_2 = 4 \cdot 1{,}73 \cdot 1{,}41 \Rightarrow d_2 = 9{,}76cm$$

................određivanje dijagonale kvadrata ....3 boda

Konačno je razlika dijagonala pravougaonika i kvadrata sa jednakim površinama:

$$d_1 - d_2 = 10cm - 9{,}76cm = 0{,}24cm$$

..............konačan odgovor.................................. 1 bod

(ukupno: 10 bodova)

Takmičenje učenika osnovnih škola HNK iz MATEMATIKE
Mostar, 22. mart 2025. godine

Rješenja za

XI razred

1. Ako je $\dfrac{111}{x+222}=333$, izračunaj $\dfrac{222}{x+555}$.

Rješenje:

Prilagodimo dati izraz:

$$\frac{111}{x+222}=333 \Leftrightarrow \frac{111}{333}=x+222$$

$$x=\frac{111}{333}-222$$ ....sređivanje prve jednačine..................... 2 boda

- Dalje, uzmimo smjenu: t=111, radi pojednostavljenja izraza:

$$x=\frac{t}{3t}-2t \Rightarrow x=\frac{1}{3}-2t$$ ....pojednostavljivanje jednačine uvođenjem smjene............. 1 bod

- pa je:

$$\frac{222}{x+555}=\frac{2t}{\frac{1}{3}-2t+5t}=\frac{2t}{\frac{1}{3}+3t} \Leftrightarrow$$ ....svođenje jednačine na jednostavniji oblik..... 2 boda

$$\Leftrightarrow \frac{2t}{\frac{1+9t}{3}}=\frac{6t}{1+9t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\cdot 111}{1+9\cdot 111}=\frac{666}{1000}=\frac{333}{500}=0{,}666$$ ....određivanje rješenja.................5 bodova

Napomena: ukoliko učenik rješenja dobije na drugi ispravan način treba bodovati istim ukupnim brojem bodova

(ukupno: 10 bodova)

2. Odredi sve cijele brojeve a za koje je razlomak $\frac{a^2-11a+24}{a^2-9a+8}$ također cijeli broj.

Rješenje:
Rastavimo na linearne faktore dati razlomak i skratimo:

$$\frac{a^2-11a+24}{a^2-9a+8}=\frac{a^2-8a-3a+24}{a^2-8a-a+8}\Leftrightarrow$$ ....pravilno rastavljanje srednjeg monoma.......2 boda

$$\Leftrightarrow\frac{a\cdot(a-8)-3\cdot(a-8)}{a(a-8)-(a-8)}=\frac{(a-8)\cdot(a-3)}{(a-8)\cdot(a-1)}\Leftrightarrow$$ ....rastavljanje kv. trinoma na lin. faktore.......2 boda

$$\Leftrightarrow\frac{a-3}{a-1}$$ ....skraćivanje razlomka.......1 bod

Uz uslov da je $a\neq 8\wedge a\neq 1$ nazivnik će biti različit od nule, ...postavljanje uslova......1 bod
pa odredimo sve cijele brojeve za koje će gornji razlomak biti također cijeli broj:

$$\frac{a-3}{a-1}=\frac{a-1-2}{a-1}=\frac{a-1}{a-1}-\frac{2}{a-1}=1-\frac{2}{a-1}$$

.........................predstavljanje razlomka kao razlike cjelobrojne vrijednosti
i pogodnog razlomka za određivanje traženog broja „a“.......5 bodova

Posljednji izraz će imati cjelobrojnu vrijednost ako

$a-1\in\{-2,-1,1,2,\}$ .... pravilno određivanje skupa ....3 boda

odnosno ako $a\in\{-1,0,2,3,\}$ ....konačan skup rješenja......1 bod

(ukupno: 15 bodova)

3. U prodavnici je bilo 98 kg krušaka i jabuka zajedno. Prodato je $\frac{4}{9}$ krušaka i $\frac{3}{5}$ jabuka, što iznosi $\frac{1}{2}$ ukupne količine krušaka i jabuka.
   Koliko je bilo krušaka, a koliko jabuka u prodavnici?

Rješenje:

- Označimo kruške sa x, a jabuke sa y
- Iz uslova zadatka imamo da je: $x+y=98$ (1) ....postavljanje uslova......1 bod
- Također iz uslova zadatka, vrijedi sljedeća relacija

$$x+y-\left(\frac{4}{9}x+\frac{3}{5}y\right)=\frac{1}{2}(x+y)$$ ....formiranje relacije.......................... 3 boda

$$x+y-\frac{4}{9}x-\frac{3}{5}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\,/\cdot 90$$

$$90x+90y-40x-54y=45x+45y$$

$$5x-9y=0 \qquad (2)$$ ....kreiranje druge veze između promjenljivih .... 2 boda

Iz relacije (1) izrazimo jednu veličinu preko druge, npr $x=98-y$
i uvrstimo u relaciju (2), tada imamo:

$$5x-9y=0$$

$$5\cdot(98-y)-9y=0$$

$$490-5y-9y=0$$

$$14y=490$$

$$y=\frac{490}{14}\Rightarrow y=35$$ ....određivanje jednog rješenja .... 3 boda

Odavde slijedi da je:

$$x=98-y\Rightarrow x=98-35\Rightarrow x=63$$ ....određivanje drugog rješenja .... 1 bod

Odgovor: U prodavnici je bilo 63 kg krušaka i 35 kg jabuka.

(ukupno: 10 bodova)

4. Izračunaj površinu četverougla ograničenog graficima funkcija: $y=-2x+2$ i $3x+4y-12=0$, te pozitivnim dijelovima koordinatnih osa.

Rješenje:

- Predstavimo (skicirajmo) obje funkcije u koordinatnom sistemu na osnovu dvije karakteristične tačke (nule f-je i odsječka na y osi) ili na drugi primjeren način, te uočimo traženu površinu

- Funkcija: $y=-2x+2$
- Odredimo nule, mjesto presjeka funkcije sa x osom (tačka A) i presjek sa y osom (tačka B)

$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$x=1$$
$$A(1,0)$$

..............određivanje nule funkcije (odnosno koordinata tačke A)..................... 2 boda

- Odredimo odsječak n, jer je očigledno naša funkcija oblika y=kx+n,

$$y=-2x+2 \Rightarrow n=2$$
$$B(0,2)$$

............određivanje odsječka na y osi (odnosno koordinata tačke B)..................... 1 bod

- Funcija $3x+4y-12=0$ je predstavljena u implicitnom obliku, pa je predstavimo u eksplicitni kako bi odredili presječne tačke C i D sa osama na isti način kao u prvoj funkciji:

$$3x+4y-12=0$$
$$4y=-3x+12 / :4$$
$$y=-\frac{3}{4}x+3$$

...................određivanje eksplicitnog oblika funkcije................. 2 boda

$$-\frac{3}{4}x+3=0$$
$$-\frac{3}{4}x=-3 / \cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$
$$x=4$$
$$C(4,0)$$

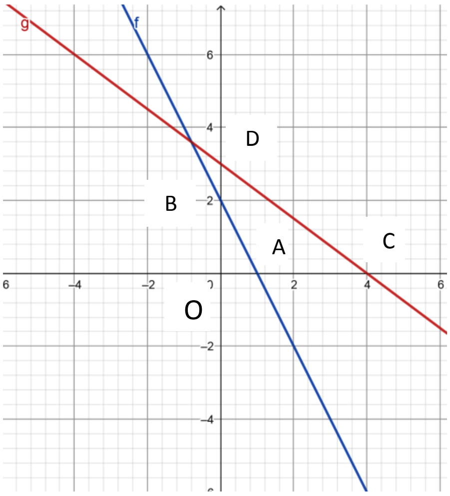
..............određivanje nule funkcije (odnosno koordinata tačke C)..................... 2 boda

$$y=-\frac{3}{4}x+3 \Rightarrow n=3$$

$$D(0,3)$$

...........određivanje odsječka na y osi (odnosno koordinata tačke D)..................... 1 bod

- Na osnovu karakterističnih tačaka predstavimo obje funkcije u pavouglom koordinatnom sistemu:



...........predstavljanje funkcija u prav. koord. sistemu.............. 2 boda

- Uočavamo da je tražena površina P četverougla ACDB, zapravo razlika površina pravouglih trouglova P_1=*OCD i* P_2=*OAB,* čije su površine redom:

...............ispravan zaključak............. 2 boda

$$P_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} \Rightarrow P_1 = 6$$

$$P_2 = \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow P_2 = 1$$

.............................određivanje površina trouglova......................... 2 boda

$$P = P_1 - P_2 = 6 - 1 \Rightarrow P = 5$$

....konačno rješenje .... 1 bod

(ukupno: 15 bodova)

Napomene:

- ukoliko učenik rješenja dobije na ovaj ili drugi ispravan način treba bodovati istim ukupnim brojem bodova