Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 22. 03. 2025.

I razred

Zadatak I.1 (10 bodova)**:** Odrediti sve cijele brojeve n za koje je

$$\frac{3n^2+11n+17}{n+2}$$

također cijeli broj.

Rješenje. Izraz

$$\frac{3n^2+11n+17}{n+2}$$

se može zapisati u obliku

$$3n+5+\frac{7}{n+2}.$$

4 boda

Odavde slijedi da je dati izraz cijeli broj samo onda ako je $\frac{7}{n+2}$ cijeli broj.

Ovo je moguće samo kada je $n+2$ djelitelj od 7, tj. $n+2 \in \{\pm 1, \pm 7\}$. 4 boda

Sada je

$$n \in \{-9, -3, -1, 5\}.$$

□ 2 boda

Zadatak I.2 (10 bodova)**:** Dokazati identitet

$$\frac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3} : \frac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4} = \frac{b}{a}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\frac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3} : \frac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4} &= \\ &= \frac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3} \cdot \frac{4a^4+7a^2b^2+3b^4}{3a^4+7a^2b^2+4b^4}\end{aligned}$$

Sada je prvi faktor:

$$\begin{aligned}\frac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3} &= \frac{(a^3+6a^2+12ab^2+8b^3)-(a^3-6a^2+12ab^2-8b^3)}{(8a^3+12a^2+6ab^2+b^3)+(8a^3-12a^2+6ab^2-b^3} = \\ &= \frac{12a^2b+16b^3}{16a^3+12ab^2} = \\ &= \frac{4b\cdot(3a^2+4b^2)}{4a\cdot(4a^2+3b^2)} = \\ &= \frac{b\cdot(3a^2+4b^2)}{a\cdot(4a^2+3b^2)}\end{aligned}$$

4 boda

Za drugi faktor imamo:

$$\begin{aligned}\frac{4a^4+7a^2b^2+3b^4}{3a^4+7a^2b^2+4b^4} &= \frac{4a^4+4a^2b^2+3a^2b^2+3b^4}{3a^4+3a^2b^2+4a^2b^2+4b^4} = \\ &= \frac{4a^2(a^2+b^2)+3b^2(a^2+b^2)}{3a^2(a^2+b^2)+4b^2(a^2+b^2)} = \\ &= \frac{(4a^2+3b^2)(a^2+b^2)}{(3a^2+4b^2)(a^2+b^2)}\end{aligned}$$

4 boda

Sada imamo

$$\frac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3} \cdot \frac{4a^4+7a^2b^2+3b^4}{3a^4+7a^2b^2+4b^4} = \frac{b\cdot\cancel{(3a^2+4b^2)}}{a\cdot\cancel{(4a^2+3b^2)}} \cdot \frac{\cancel{(4a^2+3b^2)}\cancel{(a^2+b^2)}}{\cancel{(3a^2+4b^2)}\cancel{(a^2+b^2)}} = \frac{b}{a}$$

što je i trebalo dokazati. 2 boda

□

Zadatak I.3 (15 bodova)**:** Naći ostatak pri dijeljenju polinoma $x^{2025}+1$ polinomom x^2-1.

Rješenje. Primijetimo najprije da je $x^2-1=(x+1)(x-1)$. 2 boda

Neka je sada $P(x)=x^{2025}+1$. Tada je

$$P(x)=(x+1)(x^{2024}-x^{2023}+x^{2022}-x^{2021}+\cdots+x^2-x+1).$$

3 boda

Dakle trebamo odrediti ostatak pri djeljenju polinoma
$Q(x)=x^{2024}-x^{2023}+x^{2022}-x^{2021}+\cdots+x^2-x+1$ sa $x-1$. 2 boda

Na osnovu Bezuovog stava je ostatak pri djeljenju polinoma $Q(x)$ sa $x-1$ jednak

$$Q(1)=1^{2024}-1^{2023}+1^{2022}-1^{2021}+\ldots 1^2-1^1+1=1.$$

3 boda

Sada je

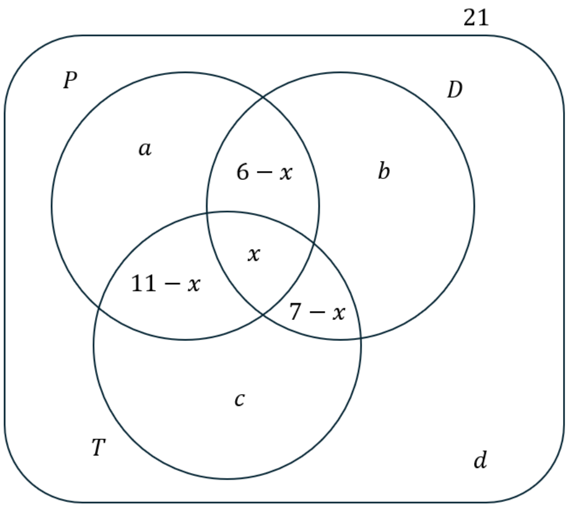
$$P(x)=(x+1)[(x-1)R(x)+1]=(x^2-1)R(x)+x+1.$$

3 boda

Dakle, ostatak je $x+1$. $\square$ 2 boda

Zadatak I.4 (15 bodova)**:** Na ispitu je 21 učenik rješavao tri zadatka. Prvi i drugi zadatak riješilo je 6 učenika, drugi i treći zadatak 7 učenika, a prvi i treći zadatak 11 učenika. Pokazati da postoje bar dva učenika koji su riješili sva tri zadatka i da postoji bar jedan učenik koji je riješio najviše jedan zadatak.

Rješenje. Započnimo sa rješavanjem zadatka izradom Venovog dijagrama na kojem ćemo prikazati date informacije. Broj učenika koji su izradili sva tri zadatka je nepoznat i označimo ga sa x.



Pri tome smo sa a, b i c označili broj učenika koji su izradili samo prvi, samo drugi i samo treći zadatak, respektivno. Broj učenika koji su nisu izradili niti jedan zadatak je označen sa d. 5 bodova

Sada imamo da je

$$a + 6 - x + b + 11 - x + x + 7 - x + c + d = 21,$$

odakle nakon sređivanja dobijamo

$$a + b + c + d - 2x = -3.$$

5 bodova

Imajući u vidu da $a, b, c, d \geq 0$ prethodna jednakost može imati rješenje samo onda ako je $x \geq 2$, što znači da su bar dva učenika riješila sva tri zadatka. 3 boda

Također, tada je bar jedan od brojeva a, b, c, d pozitivan broj, što znači da postoji bar jedan učenik koji je riješio najviše jedan zadatak. □ 2 boda

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 22. mart 2025. godine

Rješenja za
II razred

1. Za koje cijele brojeve x izraz

$$\left(\frac{x}{x+8}-\frac{4x}{\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}}\right):\left(\frac{1+2x^{-\frac{1}{3}}}{1-2x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-2}+\frac{24}{x+8}$$

ima vrijednost veću od 1?

(10 bodova)

Rješenje:

Transformišemo dati izraz:

$$\left(\frac{x}{x+8}-\frac{4x}{\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}}\right):\left(\frac{1+2x^{-\frac{1}{3}}}{1-2x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-2}+\frac{24}{x+8}=$$

$$=\left(\frac{x}{(x^{\frac{1}{3}}+2)(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+4)}-\frac{4x}{\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}}\right)\cdot\left(\frac{1+2x^{-\frac{1}{3}}}{1-2x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{2}+\frac{24}{x+8}=$$

$$=\left(\frac{x}{(x^{\frac{1}{3}}+2)(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+4)}-\frac{4x}{\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}}}{\frac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}}}\right)^{2}+\frac{24}{x+8}=$$

....2 boda

$$=\left(\frac{x(x^{\frac{1}{3}}+2)^{2}-4x(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+4)}{\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+4)}\right)\cdot\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}-2}\right)^{2}+\frac{24}{x+8}$$

....1 bod

$$= \frac{x\left(-3x^{\frac{2}{3}} + 12x^{\frac{1}{3}} - 12\right)}{(x+8)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2\right)^2} + \frac{24}{x+8}$$

....1 bod

$$= \frac{-3x\left(x^{\frac{1}{3}} - 2\right)^2}{(x+8)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2\right)^2} + \frac{24}{x+8}$$

....2 boda

$$= \frac{-3x}{x+8} + \frac{24}{x+8} = \frac{-3(x-8)}{x+8}$$

....1 bod

Sada riješimo nejednačinu $\frac{-3(x-8)}{x+8} > 1$ u skupu Z.

$$\frac{-3(x-8)}{x+8} > 1 \iff \frac{-3x+24-x-8}{x+8} > 0 \iff \frac{-4x+16}{x+8} > 0 \iff \frac{-x+4}{x+8} > 0$$

....1 bod

Rješenje date nejednačine je $x \in (-8,4)$.

....1 bod

Konačno rješenje su svi cijeli brojevi iz tog intervala, osim nule jer za $x = 0$ početni izraz nije definisan.
Dakle, vrijedi $x \in \{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3\}$.

....1 bod

*Napomena:*Ako je učenik uključio 0 u rješenje oduzeti 1 bod.

2. Odrediti realni parametar k tako da sistem jednačina

$$\left[Im\left(z+\frac{1}{2}i\right)\right]^2 = |z+2|^2 + \frac{5}{4}$$
$$Im(z) - 2Re(z) = k$$

($z \in C$) ima samo jedno rješenje.

(10 bodova)

Rješenje:

Neka je $z = x + yi\,; x, y \in \mathbb{R}$.

....1 bod

Tada prva jedačina prelazi u

$$\left[Im(x+yi+\frac{1}{2}i)\right]^2 = |x+yi+2|^2 + \frac{5}{4}$$

odnosno

$$(y+\frac{1}{2})^2 = (x+2)^2 + y^2 + \frac{5}{4}$$

....1 bod

Nakon sređivanja, data jednačina prelazi u $y = x^2 + 4x + 5$. (1)

....2 boda

Iz druge jednačine dobijamo $Im(x+yi) - 2Re(x+yi) = k$, odnosno $y = 2x + k$. (2)

....1 bod

Iz (1) i (2) dobijamo $x^2 + 4x + 5 = 2x + k \iff x^2 + 2x + 5 - k = 0$.

....2 boda

Posljednja jednačina je kvadratna i ona će imati jedno realno rješenje ako je njena diskriminanta ($D = b^2 - 4ac$) jednaka nuli, odnosno

$$4 - 4(5-k) = 0 \implies k = 4.$$

....3 boda

3. Odrediti sve vrijednosti parametra $m \in \mathbb{R}$ takvog da za rješenja x_1 i x_2 jednačine $(m-1)x^2 - 2mx + 4 = 0$ vrijedi jednakost ${x_1}^2 - 3{x_2}^2 = 4$.

(15 bodova)

Prvo rješenje:

Prema Vietovim formulama imamo:

$$x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \quad i \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{m-1} \; .$$

....1 bod

Vrijedi:

$$4 = {x_1}^2 - 3{x_2}^2 = {x_1}^2 + 2\, x_1 x_2 + {x_2}^2 - 2\, x_1 x_2 - 4{x_2}^2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2\, x_1 x_2 - 4{x_2}^2 =$$

....1 bod

$$= \left(\frac{2m}{m-1}\right)^2 - \frac{8}{m-1} - 4{x_2}^2 =$$

$$= \frac{4m^2 - 8m + 8}{(m-1)^2} - 4{x_2}^2 =$$

....1 bod

$$= \frac{4(m-1)^2 + 4}{(m-1)^2} - 4{x_2}^2 = 4 + \frac{4}{(m-1)^2} - 4{x_2}^2 \, ,$$

....2 boda

a ovo je dalje ekvivalentno sa

$$0 = \frac{1}{(m-1)^2} - {x_2}^2 = \left(\frac{1}{m-1} - x_2\right)\left(\frac{1}{m-1} + x_2\right)$$

....1 bod

Mogu nastupiti dva slučaja:

$$x_2 = \frac{1}{m-1} \ ili \ \ x_2 = -\frac{1}{m-1}$$

....1 bod

Pretpostavimo prvo da je $x_2 = \frac{1}{m-1}$. Kako je x_2 rješenje date jednačine , slijedi da je

$$(m-1)\left(\frac{1}{m-1}\right)^2 - \frac{2m}{m-1} + 4 = 0$$

što se svodi na $\frac{1-2m+4m-4}{m-1} = 0 \, , tj. 2m - 3 = 0$, odakle dobijamo $m = \frac{3}{2}$.

....2 boda

Dalje, dobijamo

$$x_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 2 \ i \ x_1 = \frac{2m}{m-1} - x_2 = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} - 2 = 4 \, ,$$

pa se direktno provjerava da su na ovaj način zaista zadovoljeni uslovi zadatka.

....2 boda

Posmatrajmo slučaj $x_2 = -\frac{1}{m-1}$. Slično imamo

$$(m-1)\left(-\frac{1}{m-1}\right)^2 + \frac{2m}{m-1} + 4 = 0$$

što se svodi na $\frac{1+2m+4m-4}{m-1} = 0 \, , tj. 6m - 3 = 0$, odakle dobijamo $m = \frac{1}{2}$.

....2 boda

Dalje, dobijamo

$$x_2 = \frac{-1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 \ \ i \ x_1 = \frac{2m}{m-1} - x_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} - 2 = -4\,,$$

pa se direktno provjerava da su i za ovaj slučaj zaista zadovoljeni uslovi zadatka.

Dakle, rješenje je $m \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

....2 boda

Drugo rješenje:

Riješimo datu jednačinu:

$$x_{1,2} = \frac{2m \pm \sqrt{(-2m)^2 - 16(m-1)}}{2(m-1)} = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 16m + 16}}{2(m-1)} =$$

$$= \frac{2m \pm \sqrt{4(m-2)^2}}{2(m-1)} = \frac{2m \pm 2(m-2)}{2(m-1)}$$

....4 boda

Dakle, jedno rješenje jednačine je $x_1 = \frac{2m+2(m-2)}{2(m-1)} = \frac{4m-4}{2(m-1)} = 2$, a drugo

$$x_2 = \frac{2m - 2(m-2)}{2(m-1)} = \frac{4}{2(m-1)} = \frac{2}{m-1}$$

....2 boda

Ako je $x_1 = 2$ i $x_2 = \frac{2}{m-1}$, uslov ${x_1}^2 - 3{x_2}^2 = 4$ svodi se na $3{x_2}^2 = 0$, što je nemoguće.

....3 boda

Dakle, mora biti $x_1 = \frac{2}{m-1}$ i $x_2 = 2$. Tada se uslov ${x_1}^2 - 3{x_2}^2 = 4$ svodi na

$$\frac{4}{(m-1)^2} - 12 = 4\,, tj.\ \frac{1}{(m-1)^2} = 4$$

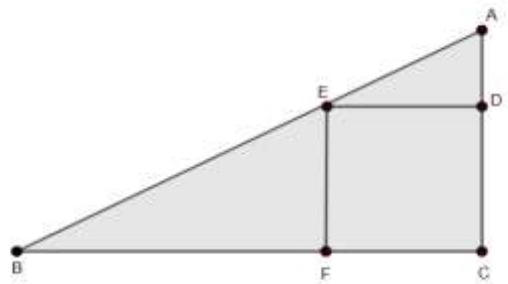
pa imamo da je $m - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$.

....4 boda

Slučaj $m - 1 = \frac{1}{2}$ daje rješenje $m = \frac{3}{2}$, a slučaj $m - 1 = -\frac{1}{2}$ daje rješenje $m = \frac{1}{2}$. Kao u prethodnom rješenju direktno se provjerava da obe vrijednosti parametra m zadovoljavaju uslov zadataka.

....2 boda

4. Katete pravouglog trougla se razlikuju za 48. U njega je upisan kvadrat površine 2025 , kao na slici. Odrediti površinu tog trougla.



(15 bodova)

Rješenje:

Označimo dužine kateta $BC\ i\ AC$ sa $a\ i\ b$, redom.

Iz uslova zadatka imamo $a - b = 48$.

Ako dužinu stranice kvadrata $CDEF$ označimo sa d , tada je $d^2 = 2025$, odnosno $d = 45$.

....1 bod

Trouglovi $BEF\ i\ ABC$ su slični, pa vrijedi $\frac{BF}{EF} = \frac{BC}{AC}$, odnosno $\frac{a-d}{d} = \frac{a}{b}$.

....6 bodova

Sređivanjem izraza i uvrštavanjem vrijednosti d , dobijamo

$$ab - 45(a + b) = 0.$$

....2 boda

Ako sada uvrstimo $a = b + 48$, dobit ćemo kvadratnu jednačinu

$$b^2 - 42b - 2160 = 0$$

čije je jedino pozitivno rješenje $b = 72$.

....4 boda

Odavde je $a = 120$, pa je površina trougla ABC jednaka

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{120 \cdot 72}{2} = 4320\ .$$

....2 boda

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 22. 03. 2025.

III razred

Zadatak III.1 (10 bodova)**:** Za koje realne brojeve x vrijedi

$$5^{2x} + 4^x < 29 \cdot 10^{x-1} \text{ ?}$$

Rješenje. Dijeljeći početnu nejednačinu s 10^x i vodeći računa da je $10^x > 0$, znak nejednakosti ostaje isti, pa dobijamo

$$\frac{5^{2x}}{10^x} + \frac{4^x}{10^x} < \frac{29}{10},$$

2 boda

odnosno

$$\frac{5^x \cdot 5^x}{5^x \cdot 2^x} + \frac{2^x \cdot 2^x}{5^x \cdot 2^x} < \frac{29}{10},$$

iz čega slijedi

$$\frac{5^x}{2^x} + \frac{2^x}{5^x} < \frac{29}{10}.$$

2 boda

Uvođenjem smjene $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, posljednja nejednačina postaje

$$t + \frac{1}{t} < \frac{29}{10}.$$

1 bod

Množeći sada posljednju nejednačinu sa $10t$, opet vodeći računa da je $10t > 0$, dobijamo kvadratnu nejednačinu

$$10t^2 - 29t + 10 < 0.$$

1 bod

Rješenje date kvadratne nejednačine je

$$t \in \left(\frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right)$$

1 bod

Vraćajući se u smjenu $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, slijedi da $\left(\frac{5}{2}\right)^x \in \left(\frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right)$, odnosno

$$\frac{2}{5} < \left(\frac{5}{2}\right)^x < \frac{5}{2}.$$

Primjenom $\log_{\frac{5}{2}}$ na gornje nejednakosti, uzimajući u obzir da je baza logaritma veća od 1 pa se nejednakost ne mijenja, dobijamo $-1 < x < 1$. Dakle traženo rješenje polazne nejednačine je

$$x \in (-1, 1).$$

3 boda

$\square$

Zadatak III.2 (10 bodova)**:** Odrediti sva rješenja jednačine

$$\left|\cos^2 x - 2\sin x\right| = 2.$$

Rješenje. Izraz unutar zagrada apsolutne vrijednosti može biti jednak 2 ili -2.

1 bod

U prvom slučaju, ako je $\cos^2 x - 2\sin x = 2$, onda je

$$1 - \sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0,$$

tj.

$$(\sin x + 1)^2 = 0,$$

2 boda

odakle slijedi

$$\sin x = -1,$$

pa je

$$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2 boda

U drugom slučaju, ako je $\cos^2 x - 2\sin x = -2$, tada slijedi da je

$$1 - \sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0,$$

tj.

$$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$$

2 boda

Uvodeći smjenu $t = \sin x$, posljednja jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = -3$ i $t_2 = 1$.

1 bod

Uvrštavajući u smjenu $t = \sin x$, slijedi

$$\sin x = -3,$$

što je nemoguće i

$$\sin x = 1,$$

odakle je

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2 boda

Rješenje se može zapisati kao jedan skup:

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Zadatak III.3 (15 bodova)**:** U trouglu sa stranicama a, b, c i površinom P vrijedi jednakost

$$\sqrt{3}\left(b^2+c^2-a^2\right)=2bc-4P.$$

Odrediti veličinu ugla naspram stranice a.

Rješenje. Dijeljeći jednakost $\sqrt{3}\,(b^2+c^2-a^2)=2bc-4P$ sa $2bc$, dobijamo

$$\sqrt{3}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1-\frac{4P}{2bc}.$$

3 boda

Kako je $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ i primjenom kosinusne teoreme $b^2+c^2-a^2=2bc\cos\alpha$, to jednakost postaje

$$\sqrt{3}\cdot\frac{2bc\cos\alpha}{2bc}=1-\frac{2bc\sin\alpha}{2bc},$$

4 boda

pa dobijamo trigonometrijsku jednačinu

$$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=1.$$

1 bod

Dijeljeći posljednju jednačinu sa 2, dobijamo

$$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2},$$

2 boda

odnosno

$$\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\frac{1}{2},$$

2 boda

tj.

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

2 boda

Odavde dobijamo da je

$$\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6},$$

odnosno

$$\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

1 bod

□

Zadatak III.4 (15 bodova)**:** Riješiti jednačinu

$$25^{\log_{0,2}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)}=\frac{1}{9}.$$

Rješenje. Jednačina $25^{\log_{0,2}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)}=\frac{1}{9}$ se može napisati u obliku

$$5^{2\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)}=\frac{1}{9},$$

1 bod

odnosno

$$5^{\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)^2}=\frac{1}{9}.$$

1 bod

Koristeći sada da je

$$\log_a b=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b},\ 0<a\neq 1, b>0,$$

dobijamo

$$5^{\log_5 \frac{1}{\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)^2}}=\frac{1}{9},$$

2 boda

odnosno

$$\frac{1}{\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)^2}=\frac{1}{9},$$

1 bod

tj.

$$\frac{1}{\sin^2 x+5\sin x\cos x+5}=\pm\frac{1}{3}.$$

1 bod

Uzimajući u prvom slučaju da je desna strana jednačine $-\frac{1}{3}$, dobijamo trigonometrijsku jednačinu

$$\sin^2 x+5\sin x\cos x+5=-3,$$

odnosno

$$\sin^2 x+5\sin x\cos x+8=0,$$

1 bod

koja se transformiše u jednačinu

$$9\sin^2 x+5\sin x\cos x+8\cos^2 x=0.$$

1 bod

Ako posljednju jednačinu podijelimo sa $\cos^2 x$, dobijamo jednačinu

$$9\tan^2 x+5\tan x+8=0,$$

1 bod

koja se smjenom $\tan x = t$ svodi na kvadratnu jednačinu

$$9t^2 + 5t + 8 = 0,$$

koja nema realnih rješenja. 1 bod

Ako sada u drugom slučaju uzmemo da je desna strana jednaka $\frac{1}{3}$, dobijamo jednačinu

$$\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5 = 3,$$

donosno

$$\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = 0,$$

1 bod

koja se transformiše u jednačinu

$$3 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

1 bod

Dijeljeći posljednju jednačinu sa $\cos^2 x$, dobijamo

$$3 \tan^2 x + 5 \tan x + 2 = 0,$$

1 bod

gdje se posljednja jednačina smjenom $\tan x = t$ svodi na kvadratnu jednačinu

$$3t^2 + 5t + 2 = 0.$$

Rješenja ove jednačine su $t_1 = -1$ i $t_2 = -\frac{2}{3}$.

1 bod

Uvrštavajući u smjenu $\tan x = t$, dobijamo:
za $t_1 = -1$ je $\tan x = -1$, pa je

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

a za $t_2 = -\frac{2}{3}$ je $\tan x = -\frac{2}{3}$, pa je

$$x_2 = \arctan -\frac{2}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1 bod

$\square$

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 22. mart 2025. godine

Rješenja za

IV razred

1. Ako je

$$(f^\circ g)(x) = 2^{4^{4^{sinx}}} \text{ i } f(x) = 4^{8^{-2^x}}$$

odrediti funkciju $g(x)$ i njeno definiciono područje.

(10 bodova)

Rješenje:

Vrijedi $(f^\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 4^{8^{-2^{g(x)}}}$. Zbog toga je

$$4^{8^{-2^{g(x)}}} = 2^{4^{4^{sinx}}}.$$

....2 bod

Sada dobijamo :

$$2^{2\cdot 8^{-2^{g(x)}}} = 2^{4^{4^{sinx}}}$$

$$2\cdot 8^{-2^{g(x)}} = 4^{4^{sinx}}$$

$$2\cdot 2^{-3\cdot 2^{g(x)}} = 2^{2\cdot 4^{sinx}}$$

$$2^{1-3\cdot 2^{g(x)}} = 2^{2\cdot 4^{sinx}}$$

....2 bod

$$1-3\cdot 2^{g(x)}=2\cdot 4^{sinx}$$

$$1-3\cdot 2^{g(x)}=2\cdot 2^{2sinx}$$

$$1-3\cdot 2^{g(x)}=2^{1+2sinx}$$

$$3\cdot 2^{g(x)}=1-2^{1+2sinx}$$

$$2^{g(x)}=\frac{1-2^{1+2sinx}}{3}$$

....2 bod

$$g(x)=log_2\frac{1-2^{1+2sinx}}{3}$$

....1 bod

Odredimo domenu funkcije g.

Iz uslova $\frac{1-2^{1+2sinx}}{3}>0$ redom slijedi

$$1-2^{1+2sinx}>0$$

$$2^{1+2sinx}<1$$

$$1+2sinx<0$$

$$sinx<-\frac{1}{2}$$

....2 bod

Konačno, $x\in\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

....1 bod

2. Tri broja obrazuju geometrijski niz. Ako drugi broj uvećamo za 8, tada ti brojevi čine aritmetički niz.No, ako poslije toga uvećamo posljednji broj za 64 , tada niz ponovo postaje geometrijski.Naći te brojeve.

(10 bodova)

Rješenje:

Označimo date brojeve sa $x, y\ i\ z$. Iz uslova zadatka slijedi:

$$y^2 = xz \qquad (1)$$

$$y + 8 = \frac{x+z}{2} \qquad (2)$$

$$(y+8)^2 = x(z+64) \qquad (3)$$

....4 bodova

Iz (1) i (3) imamo $y = 4x - 4$. Uvrštavanjem u (2) dobija se $z = 7x + 8$.

Stavljajući $y = 4x - 4$ i $z = 7x + 8$ u (1) dobija se $9x^2 - 40x + 16 = 0$.

....3 bod

Rješenja posljednje jednačine su $x_1 = 4\ \ i\ \ x_2 = \frac{4}{9}$.

....1 bod

Sada se lahko nalaze traženi brojevi.

Dakle, imamo dva rješenja: $(x, y, z) = (4,12,36)\ \ i\ (x, y, z) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

....2 bod

3. Koliko ima kompleksnih brojeva z takvih da je $|z| = 1$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ i razlika $z^{5!} - z^{4!}$ je realan broj?

(15 bodova)

Rješenje:

Kako je $|z| = 1$, broj z možemo zapisati u trigonometrijskom obliku

$$z = cos\varphi + isin\varphi$$

....1 bod

Tada je

$$z^{5!} = cos(5!\,\varphi) + isin(5!\,\varphi) = cos(120\varphi) + isin(120\varphi)$$
$$z^{4!} = cos(4!\,\varphi) + isin(4!\,\varphi) = cos(24\varphi) + isin(24\varphi)$$

....2 boda

pa imamo

$$z^{5!} - z^{4!} = cos(120\varphi) - cos(24\varphi) + i(sin(120\varphi) - sin(24\varphi))$$

....1 bod

Navedena razlika će biti realan broj ako je imaginarni dio jednak nuli, odnosno ako vrijedi

$$sin(120\varphi) - sin(24\varphi) = 0$$

$$sin(120\varphi) = sin(24\varphi)$$

....2 boda

Iz posljednje jednakosti dobijamo dva slučaja:

$$120\varphi = 24\varphi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

ili

$$120\varphi = \pi - 24\varphi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

odnosno $\varphi = \frac{2k\pi}{96}$ ili $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{144}$, $k \in \mathbb{Z}$.

....4 boda

Budući da je $0 \le \varphi < 2\pi$, slijedi da je

$$0 \le \frac{2k\pi}{96} < 2\pi \Longrightarrow 0 \le k < 96\,, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \le \frac{(2k+1)\pi}{144} < 2\pi \Longrightarrow -0.5 \le k < 143.5\ , k \in \mathbb{Z}$$

....2 boda

Takvih cijelih brojeva k ima $96 + 144 = 240$, što je i traženi broj kompleksnih brojeva.

....3 boda

4. Ako za realne brojeve $a, b, c\ , d$ i za svaki prirodan broj $n \geq 4$ vrijedi jednakost

$$\frac{a}{3}\binom{n}{1} + b\binom{n}{2} + c\binom{n}{3} + d\binom{n}{4} = n^4 + \frac{253}{3}n^3$$

odredi za koji prirodan broj m vrijedi $\frac{b+d-c}{\sqrt[m]{a}} = 1$?

(15 bodova)

Rješenje:

Nakon raspisivanja binomnih koeficijenata dobijamo sljedeću jednakost:

$$\frac{1}{3}a \cdot n + b\frac{n(n-1)}{2} + c\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + d\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = n^4 + \frac{253}{3}n^3$$

....1 bod

Iz toga slijedi niz ekvivalentnih jednakosti:

$$8an + 12b(n^2 - n) + 4nc(n^2 - 3n + 2) + d(n^2 - n)(n^2 - 5n + 6) = 24n^4 + 2024n^3$$

$$8an + 12bn^2 - 12bn + 4cn^3 - 12cn^2 + 8cn + dn^4 - 6dn^3 + 11dn^2 - 6dn = 24n^4 + 2024n^3$$

$$dn^4 + (4c - 6d)n^3 + (12b - 12c + 11d)n^2 + (8a - 12b + 8c - 6d)n = 24n^4 + 2024n^3$$

....4 boda

Sada na obe strane imamo polinome četvrtog stepena čija jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve $n, n \geq 4$.

Zbog toga su koeficijenti polinoma sa lijeve i desne strane jednakosti jednaki, tj. vrijedi sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{gathered} d = 24 \\ 4c - 6d = 2024 \\ 12b - 12c + 11d = 0 \\ 8a - 12b + 8c - 6d = 0 \end{gathered}$$

....4 boda

Uvrštavanjem $d = 24$ redom u drugu , treću i četvrtu jednačinu dobijamo vrijednosti ostalih koeficijenata.Dakle, $c = 542, b = 520\ i\ a = 256$.

....3 boda

Kada vrijednosti $a, b, c\ i\ d$ uvrstimo u jednakost

$$\frac{b + d - c}{\sqrt[m]{a}} = 1$$

dobijamo $\frac{2}{\sqrt[m]{256}} = 1$, pa je traženi broj m=8.

....3 boda