Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 28. mart 2026. godine

Rješenja za
I razred

1. Šest učenika, označimo ih s $A, B, C, D, E\ i\ F$, rješavali su neki zadatak. Zadatak su riješila dva učenika. Na pitanje : „Ko je riješio zadatak?“, oni su dali pet odgovora:

   1) $A\ i\ C$;
   2) $B\ i\ E$;
   3) $F\ i\ A$;
   4) $B\ i\ F$;
   5) $D\ i\ A$.

   U četiri od pet odgovora jedan dio je tačan, a drugi netačan, dok su u jednom odgovoru oba dijela netačna. Koji su učenici riješili zadatak?

   (10 bodova)

Rješenje:

Sa T i ⊥ označavat ćemo tačnost, odnosno netačnost nekog dijela od ponuđenih odgovora.

1. Pretpostavimo da su u prvom odgovoru oba dijela netačna,

   tj. A (⊥) i C (⊥).

   Tada, prema uvjetu zadatka, imamo:
   5) ⇒ D (T), 3) ⇒ F (T), 4) ⇒ B (⊥), 2) ⇒ E (T),

   što je nemoguće, jer bi ispalo da su tri učenika riješila zadatak.

   ....2 boda

2. Pretpostavimo sada da je B (⊥) i E (⊥).

   Tada bi vrijedilo:
   4) ⇒ F (T), 3) ⇒ A (⊥), 1) ⇒ C (T), 5) ⇒ D (T),

   što je, također, nemoguće.

   ....2 boda

3. Pretpostavimo da je F (⊥) i A (⊥).

   Tada bi vrijedilo:

   4) ⇒ B (T), 5) ⇒ D (T), 2) ⇒ E (⊥), 1) ⇒ C (T),

   što je kontradikcija!

   ....2 boda

4. Ako je B (⊥) i F (⊥), tada bi bilo:

   3) ⇒ A (T), 2) ⇒ E (T), 1) ⇒ C (⊥), 5) ⇒ D (⊥),

   tj. zadatak su riješili A i E.

   ....2 boda

5. Konačno, ako je D (⊥) i A (⊥), tada bi vrijedilo:

   1) ⇒ C (T), 3) ⇒ F (T), 4) ⇒ B (⊥), 2) ⇒ E (T),

   što je nemoguće prema pretpostavci zadatka.

   ....2 boda

Dakle, zadatak su riješili A i E.

2. Izračunati vrijednost izraza

$$P=\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\ \dots\ \left(1+\frac{1}{2023\cdot 2025}\right)\left(1+\frac{1}{2024\cdot 2026}\right).$$

(10 bodova)

Rješenje:

Uočimo da je svaki izraz u zagradi oblika

$$1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)},n=1,2,\dots,2024.$$

....3 boda

Zbog toga je

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{2^2}{1\cdot 3},1+\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{3^2}{2\cdot 4},1+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{4^2}{3\cdot 5},\dots$$

$$1+\frac{1}{2023\cdot 2025}=\frac{2024^2}{2023\cdot 2025},1+\frac{1}{2024\cdot 2026}=\frac{2025^2}{2024\cdot 2026}.$$

....3 boda

Dakle,

$$P=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{2024^2}{2023\cdot 2025}\cdot\frac{2025^2}{2024\cdot 2026}.$$

....2 boda

Skraćivanjem (teleskopski proizvod) dobijamo:

$$P=\frac{2\cdot 2025}{2026}=\frac{2025}{1013}.$$

....2 boda

3. Za realne brojeve a, b i c vrijedi $abc = -1$, $a + b + c = 4$ i

$$\frac{a}{a^2-3a-1} + \frac{b}{b^2-3b-1} + \frac{c}{c^2-3c-1} = \frac{4}{9}.$$

Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{33}{2}$.

(15 bodova)

Rješenje:

Uočimo da iz $abc = -1$ slijedi da nijedan od brojeva a, b, c nije jednak nuli.

Uvrštavanjem $abc = -1$ i $a = 4 - b - c$ (odnosno $a - 3 = 1 - (b + c)$) u nazivnik prvog razlomka dobivamo:

$$\frac{a}{a^2 - 3a - 1} = \frac{a}{a^2 - 3a + abc} = \frac{1}{a - 3 + bc} =$$

$$= \frac{1}{(1 - b - c) + bc} = \frac{1}{(b - 1)(c - 1)}$$

....4 boda

Analogno dobijemo

$$\frac{b}{b^2 - 3b - 1} = \frac{1}{(a - 1)(c - 1)}$$

$$\frac{c}{c^2 - 3c - 1} = \frac{1}{(a - 1)(b - 1)}$$

....2 boda

Sada imamo:

$$\frac{4}{9}=\frac{a}{a^2-3a-1}+\frac{b}{b^2-3b-1}+\frac{c}{c^2-3c-1}=$$

$$=\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(b-1)}=$$

$$=\frac{(a-1)+(b-1)+(c-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\frac{a+b+c-3}{(a-1)(b-1)(c-1)}=$$

$$=\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

....3 boda

odnosno

$$(a-1)(b-1)(c-1)=\frac{9}{4}$$

....1 bod

Kako vrijedi

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1=$$

$$=-1-ab-ac-bc+4-1=2-ab-ac-bc,$$

....1 bod

možemo zaključiti

$$ab+ac+bc=2-(a-1)(b-1)(c-1)=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}.$$

....1 bod

Konačno, vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) =$$

$$4^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 16 + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}$$

....3 boda

što je i trebalo dokazati.

4. Dat je jednakostranični trougao ΔABC. Izvan tog trougla je uzeta tačka D takva da je $\measuredangle DCB = 20^{\circ}\ i\ \measuredangle DBC = 40^{\circ}$.
   a) U kojem omjeru prava AD dijeli ugao $\measuredangle BAC$?
   b) Dokazati da je $\overline{AD} = \overline{DC} + \overline{DB}$.

(15 bodova)

Rješenje:

Produžimo duž CD preko tačke D do tačke E tako da je $\overline{DE} = \overline{DB}$.

....2 boda

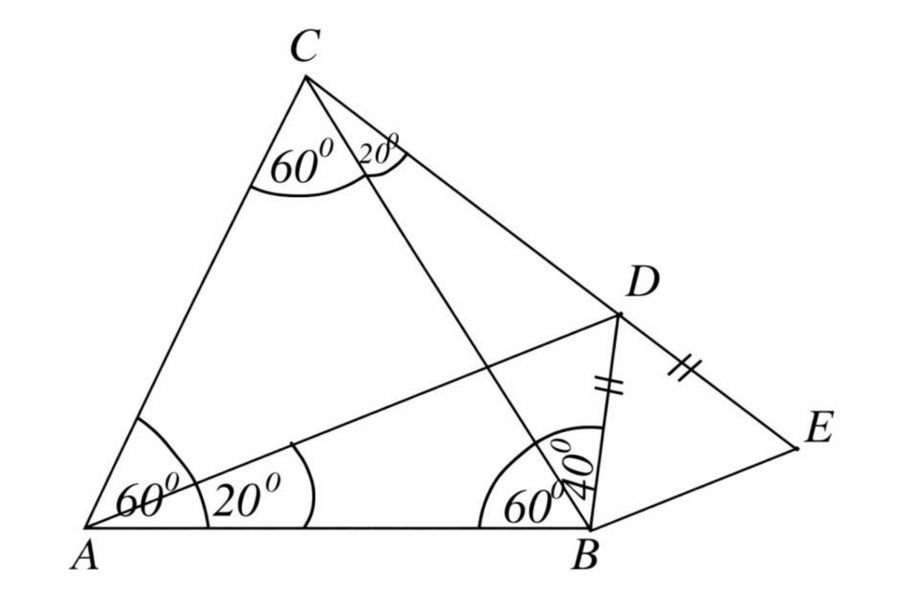
Trougao $\triangle\ BDE$ je sada jednakokraki, a pošto je

$$\measuredangle BDE = 20^{\circ} + 40^{\circ} = 60^{\circ}\ (vanjski\ ugao\ trougla\ \Delta\ BCD),$$

....2 boda

to je $\triangle\ BDE$ jednakostranični.

....2 boda



....1 bod

Sada slijedi da je $\triangle ABD \cong \triangle CBE$

(jer je $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE = 100^\circ$, $\overline{BD} = \overline{BE}$)

....3 boda

pa je

$$\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 20^\circ, \text{ tj.}$$

....1 bod

a) $\measuredangle DAB : \measuredangle DAC = 20^\circ : 40^\circ = 1 : 2$

....2 boda

a također

b) $\overline{AD} = \overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{CD} + \overline{DB}$

....2 boda

što je i trebalo dokazati.

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 28. 03. 2026.

II razred

Zadatak II.1 (10 bodova)**:** U zavisnosti od pozitivnog realnog parametra p riješi nejednačinu

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2.$$

Rješenje. Da bi izraz imao smisla mora biti $x \neq 0$. 1 bod

Posmatrajmo dva slučaja (1.) $x > 0$ i (2.) $x < 0$. 1 bod

(1.) $x > 0$. Sređivanjem dobijamo

$$x^2 - 2p^2 < 2px$$
$$x^2 - 2px + p^2 < 3p^2$$
$$(x-p)^2 < 3p^2$$
$$|x-p| < p\sqrt{3},$$

tj. $p - p\sqrt{3} < x < p + p\sqrt{3}$, odakle zbog $x > 0$ imamo

$$0 < x < p + p\sqrt{3}.$$

3 boda

(2.) $x < 0$. Sličnom sređivanjem dobijamo

$$x^2 - 2p^2 > 2px$$
$$|x-p| > p\sqrt{3}$$
$$x - p < -p\sqrt{3} \text{ ili } x - p > p\sqrt{3},$$

tj.

$$x < -\sqrt{3}p + p \text{ ili } x > p\sqrt{3} + p,$$

Drugi slučaj odbacujemo jer $x < 0$, pa je

$$x < p(1-\sqrt{3}).$$

3 boda

Dakle konačno riješenje je

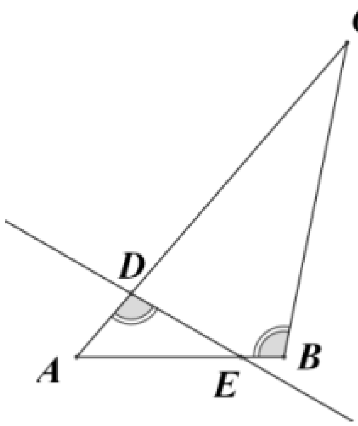
$$x \in \Big(-\infty, (1-\sqrt{3})p\Big) \cup \Big(0, (1+\sqrt{3})p\Big)$$

. 2 boda

□

Zadatak II.2 (10 bodova)**:** U trouglu ABC je $|AB| = 30$ cm. Iz tačke D na stranici AC nacrtan je pravac koji stranicu AB siječe u tački E tako da je $\measuredangle ADE = \measuredangle CBA$. Odredi $|AC|$ ako je $|AE|$ duža od $|AD|$ za 6 cm i ako vrijedi $|AC| : |AD| = 10 : 1$.

Rješenje.



1 bod

Trougao ADE je sličan trouglu ABC (jer je $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$ i $\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$) pa je

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}.$$

3 boda

Iz postavke zadatka je $|AE| = |AD| + 6$ i $|AC| = 10|AD|$, pa je

$$\frac{30}{10|AD|} = \frac{|AD|}{|AD| + 6}.$$

2 boda

Odavde je

$$30|AD| + 180 = 10|AD|^2,$$

ili

$$|AD|^2 - 3|AD| - 18 = 0.$$

1 bod

Sada je $|AD| = 6$ ili $|AD| = -3$ (ovo rješenje odbacujemo) 2 boda

Dakle $|AC| = 10|AD| = 60$. 1 bod

$\square$

Zadatak II.3 (15 bodova)**:** Za korijene x_1 i x_2 kvadratne jednačine vrijede sljedeće relacije

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 - a = 0$$

$$x_1x_2 - ax_1 - ax_2 + 1 = 0$$

pri čemu je a realni parametar.

Odrediti za koje vrijednosti parametra a ta kvadratna jednačina ima realna rješenja udaljena najviše za 2 jedno od drugog.

Rješenje. Oduzimajući

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 - a = 0$$

$$x_1x_2 - ax_1 - ax_2 + 1 = 0$$

dobijamo

$$x_1 + x_2 + a(x_1 + x_2) = a + 1,$$

tj.

$$x_1 + x_2 = 1.$$

3 boda

Sada je $x_1x_2 = a - 1$, pa je

$$x^2 + x + a - 1 = 0$$

2 boda

kvadratna jednačina koja zadovoljava date uslove.

Pošto jednačina ima dva rješenja to je $D \geq 0$ pa je iz

$D = 1^2 - 4(a - 1) = 1 - 4a + 4 = 5 - 4a.$

$$5 - 4a \geq 0,$$

tj.

$$a \leq \frac{5}{4}.$$

4 boda

Pošto rješenja trebaju biti udaljena najviše za 2 jedna od drugog, iz

$$x_2 - x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2} = \frac{2\sqrt{D}}{2} = \sqrt{D} \leq 2.$$

3 boda

Sada je

$$5 - 4a \leq 4$$

$$4a \geq 1$$

$$a \geq \frac{1}{4}.$$

2 boda

Dakle, konačno rješenje je

$$\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{5}{4}.$$

1 bod

□

Zadatak II.4 (15 bodova)**:** Kompleksan broj z zadovoljava relaciju

$$5(z+i)^n = (4+3i)(1+iz)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokazati da je tada z realan broj.

Rješenje. Koristićemo sljedeće osobine kompleksnih brojeva $z = w \Rightarrow |z| = |w|$, $|zw| = |z||w|$, $|z^n| = |z|^n$. Sada je

$$5(z+i)^n = (4+3i)(1+iz)^n$$
$$|5(z+i)^n| = |(4+3i)(1+iz)^n|$$

3 boda

$$5|z+i|^n = \sqrt{4^2+3^2}|1+iz|^n$$
$$5|z+i|^n = 5|1+iz|^n$$
$$|z+i|^n = |1+iz|^n$$
$$|z+i| = |1+iz|$$

5 bodova

Stavimo da je $z = x + iy$. 1 bod

Sada je

$$|x+iy+i| = |1+i(x+iy)|$$
$$|x+i(y+1)| = |1-y+ix|$$
$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(1-y)^2+x^2}$$
$$x^2+(y+1)^2 = (1-y)^2+x^2$$
$$(y+1)^2 = (1-y)^2$$

5 bodova

Odavde je

$$y^2+2y+1 = 1-2y+y^2$$
$$4y = 0$$
$$y = 0.$$

Dakle, kompleksan broj z je realan. □ 2 boda

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 28.3.2026

III razred

Zadatak 1 (10 bodova): Riješiti jednačinu:

$$5^{\frac{2x+2}{5}} - 4^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{2x-3}{5}} + 4^{\frac{2x-2}{3}}$$

Rješenje:

$5^{\frac{2x+2}{5}} - 5^{\frac{2x-3}{5}} = 4^{\frac{2x-2}{3}} + 4^{\frac{2x-5}{3}}$ ______________________________ 1 bod

$5^{\frac{2x-3+5}{5}} - 5^{\frac{2x-3}{5}} = 4^{\frac{2x-5+3}{3}} + 4^{\frac{2x-5}{3}}$ ______________________________1 bod

$5^{\frac{2x-3}{5}+1} - 5^{\frac{2x-3}{5}} = 4^{\frac{2x-5}{3}+1}\ 4^{\frac{2x-5}{3}}$ ______________________________1 bod

$5^{\frac{2x-3}{5}} . 5 - 5^{\frac{2x-3}{5}} = 4^{\frac{2x-5}{3}} . 4 + 4^{\frac{2x-5}{3}}$ ______________________________1 bod

$5^{\frac{2x-3}{5}} (5-1) = 4^{\frac{2x-5}{3}} (4+1)$

$5^{\frac{2x-3}{5}} . 4 = 4^{\frac{2x-5}{3}} . 5$ ______________________________1 bod

$5^{\frac{2x-3}{5}} : 5 = 4^{\frac{2x-5}{3}} : 4$ ______________________________1 bod

$5^{\frac{2x-3}{5}-1} = 4^{\frac{2x-5}{3}-1}$

$5^{\frac{2x-3-5}{5}} = 4^{\frac{2x-5-3}{3}}$ ______________________________1 bod

$5^{\frac{2x-8}{5}} = 4^{\frac{2x-8}{3}}$ ______________________________1 bod

$\left(\sqrt[5]{5}\right)^{2x-8} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^{2x-8}$

$\left(\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{4}}\right)^{2x-8} = \left(\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{4}}\right)^{0}$ ______________________________ 1 bod

2x-8 = 0

2x = 8

$x = \frac{8}{2}$

x = 4 ______________________________1 bod

Zadatak 2 (10 bodova): Riješiti jednačinu:

$$\sqrt{log_a\sqrt[4]{ax} + log_x\sqrt[4]{ax}} + \sqrt{log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a$$

Rješenje:

Definiciono područje: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$ ______________________________1 bod

$$\sqrt{\frac{1}{4}log_a ax + \frac{1}{4}log_x ax} + \sqrt{\frac{1}{4}log_a\frac{x}{a} + \frac{1}{4}log_x\frac{a}{x}} = a$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{log_a ax + log_x ax} + \frac{1}{2}\sqrt{log_a\frac{x}{a} + log_x\frac{a}{x}} = a \ / \cdot 2$$ ______________________________1 bod

$$\sqrt{log_a a + log_a x + log_x a + log_x x} + \sqrt{log_a x - log_a a + log_x a - log_x x} = 2a$$

$$\sqrt{1 + log_a x + \frac{1}{log_a x} + 1} + \sqrt{log_a x - 1 + \frac{1}{log_a x} - 1} = 2a$$ _________________________1 bod

Uvodimo smjenu : $log_a x = t$

$$\sqrt{2 + t + \frac{1}{t}} + \sqrt{t + \frac{1}{t} - 2} = 2a$$ ____1 bod

$$\sqrt{\frac{t^2+2t+1}{t}} + \sqrt{\frac{t^2-2t+1}{t}} = 2a$$

$$\sqrt{\frac{(t+1)^2}{t}} + \sqrt{\frac{(t-1)^2}{t}} = 2a$$ ____1 bod

$$\frac{|t+1|}{\sqrt{t}} + \frac{|t-1|}{\sqrt{t}} = 2a \ /\cdot \sqrt{t}$$

Definiciono područje: $t > 0$

$$|t + 1| + |t - 1| = 2a\sqrt{t}$$ ____1 bod

Pravimo tabelu:

t+1=0 t-1 = 0

t=-1 t=1

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t + 1	-	+	+	
t - 1	-	-	+	

Zbog $t > 0$ posmatramo slućaj $t \in (0,1)$

$$\text{tj. } t+1>0, t-1<0$$
$$t+1-(t-1)=2a\sqrt{t}$$
$$t+1-t+1=2a\sqrt{t}$$
$$2=2a\sqrt{t}\ |:2$$
$$1=a\sqrt{t}\,\big|^2$$
$$1=a^2t \Rightarrow t=\frac{1}{a^2}, \log_a x=\frac{1}{a^2} \Rightarrow x=a^{\frac{1}{a^2}}$$

Iz uslova $\frac{1}{a^2} < 1.$

$a^2 > 1$

a > 1 ____2 bod

Drugi slučaj $t \in [1,+\infty)$

$$tj. t+1>0$$
$$t+1+t-1=2a\sqrt{t}$$
$$2t=2a\sqrt{t}\ |:2$$
$$t=a\sqrt{t}\,\big|^2$$
$$t^2=a^2t$$
$$t^2-a^2t=0$$
$$t(t-a^2)=0$$

$t_1 = 0$ nije rješenje ____1 bod

$a)$ $a \in (0,1)$ jedn. nema rješ.

b) $a \in [1,+\infty)$ jedn. ima rješenja

$x = a^{a^2}, x = a^{\frac{1}{a^2}}$ ____1 bod

Zadatak 3 (15 bodova): Riješite i diskutujte jednačinu

$1+\cos\ 4x = m(\sin\ x-\cos\ x)^2$, gdje je $m\in\mathbb{R}$

Rješenje.

U sljedećih nekoliko koraka jednačinu ćemo svesti
na jednostavniji oblik:

$1+\cos^2 2x-\sin^2 2x = m(\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x)$ ______ $1 bod$
$1+1-\sin^2 2x-\sin^2 2x = m(1-\sin 2x)$ ______ $1 bod$
$2(1-\sin^2 2x) = m(1-\sin 2x)$ ______ $1 bod$
$2(1-\sin 2x)(1+\sin 2x) = m(1-\sin 2x)$ ______ $1 bod$
$2(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)-m(1-\sin 2x) = 0$ ______ $1 bod$
$(1-\sin 2x)(2+2\sin 2x-m) = 0$ ______ $1 bod$

Prvi slučaj:

$1-\sin\ 2x = 0$
$\sin\ 2x = 1$
$2x = \frac{\pi}{2}+2k\pi /:2$
$x = \frac{\pi}{4}+k\pi, (k\in z)$ ______ 2boda

Drugi slučaj:

$2\sin\ 2x+2-m = 0$
$2\sin\ 2x = m-2$
$\sin\ 2x = \frac{m-2}{2}$ ______ 2boda

Ova jednačina ima rješenje

$\frac{m-2}{2}\in[-1,1]$
za $-1\le\frac{m-2}{2}\le 1/2$ ______ 3boda
$-2\le m-2\le 2$
$0\le m\le 4$, tj. $m\in[0,4]$

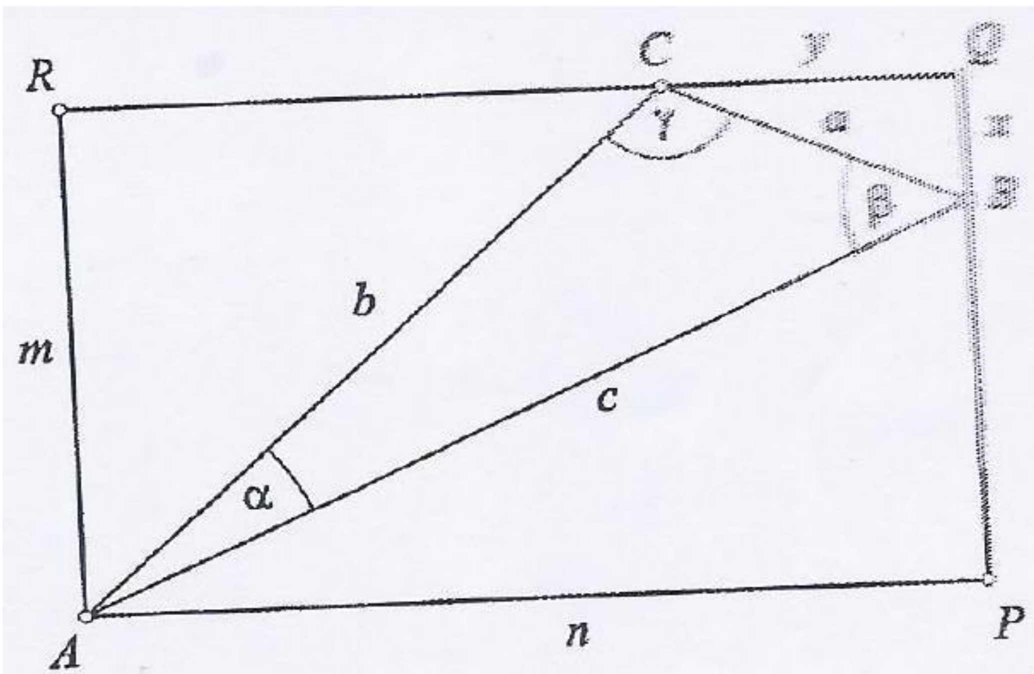
Odavde se dobivaju rješenja:

$2x = \arcsin\frac{m-2}{2}+2k\pi \Big|:2$
$x_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{m-2}{2}+k\pi\ , m\in[0,4], (k\in z)$ ______ $1 bod$
$2x = \pi-\arcsin\frac{m-2}{2}+2k\pi \Big|:2$
$x_2 = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{m-2}{2}+k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{m-2}{2}+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, m\in[0,4], (k\in z)$ ___1bod

Zadatak. 4. (15 bodova) Trougao ABC sa uglovima α, β, γ upisan je u pravougaonik $APQR$ tako da tačka B leži na stranici $\overline{PQ}$, a tačka C na stranici $\overline{QR}$.
Dokažite da je: $\text{ctg}\alpha \cdot P(BCQ) = \text{ctg}\beta \cdot P(ACR) + \text{ctg}\gamma \cdot P(ABP)$

Rješenje. Prvo rješenje.

Nelea su a, b, c dužine stranica $\triangle ABC$ te neka je $|AR| = m$,



1 bod

$|AP| = n, |BQ| = x, |CQ| = y$

Tada je $a^2 = x^2 + y^2, b^2 = m^2 + (n - y)^2 \Leftrightarrow b^2 = m^2 + n^2 - 2ny + y^2$

$c^2 = n^2 + (m - x)^2 \Leftrightarrow c^2 = n^2 + m^2 - 2mx + x^2$ ______________________1 bod

Prema kosinusnoj teoremi je: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

odnosno $\cos\alpha = \frac{m^2+n^2-2ny+y^2+n^2+m^2-2mx+x^2-x^2-y^2}{2bc} = \frac{2(m^2+n^2-mx-ny)}{2bc}$

$\cos\ \alpha = \frac{m^2+n^2-mx-ny}{bc}$ ____1 bod

Površina trougla: $P(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\ \alpha$

$$P(ABC) = P(APQR) - P(ABP) - P(BCQ) - P(ACR)$$
$$P(ABC) = m\cdot n - \frac{n(m-x)}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{m\cdot(n-y)}{2}$$
$$P(ABC) = \frac{2mn - mn + nx - xy - mn + my}{2} = \frac{my + nx - xy}{2}$$
$$\frac{1}{2}bc\cdot\sin\ \alpha = \frac{my+nx-xy}{2}\Big|\cdot 2$$
$$bc\cdot\sin\ \alpha = my + nx - xy \Rightarrow \sin\ \alpha = \frac{my+nx-xy}{bc}$$

_____________2 boda

Konačno dobivamo $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha} = \frac{\frac{m^2+n^2-mx-ny}{bc}}{\frac{my+nx-xy}{bc}} = \frac{m^2+n^2-mx-ny}{my+nx-xy}$ __________1 bod

Na sličan način se dobije $\text{ctg}\ \beta$.

Prema kosinusnoj teoremi je: $\cos\ \beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$\cos\ \beta = \frac{x^2+y^2+n^2+m^2-2mx+x^2-m^2-n^2+2ny-y^2}{2ac} = \frac{2(x^2-mx+ny)}{2ac}$$

$$\cos\beta = \frac{x^2-mx+ny}{ac}$$ ____________________________________1 bod

Površina trougla: $P(ABC) = \frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta$, $P(ABC) = \frac{my+nx-xy}{2}$

$$\frac{1}{2}ac\cdot\sin\ \beta = \frac{my+nx-xy}{2}/\cdot 2$$
$$ac\sin\ \beta = my + nx - xy\ \Rightarrow \sin\beta = \frac{my+nx-xy}{ac}$$ ______________1*bod*

$$\text{ctg}\beta = \frac{\cos\ \beta}{\sin\ \beta} = \frac{\frac{x^2-mx+ny}{ac}}{\frac{my+nx-xy}{ac}} = \frac{x^2-mx+ny}{my+nx-xy}$$ _________________1*bod*

Na sličan način se dobije ctg γ.

Prema kosinusnoj teoremi je: $\cos\ \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$\cos\ \gamma = \frac{x^2+y^2+m^2+n^2-2ny+y^2-n^2-m^2+2mx-x^2}{2ab} = \frac{2(y^2+mx-ny)}{2ab}$$

$$\cos\gamma = \frac{y^2+mx-ny}{ab}$$ ______________________________1 bod

Površina trougla: $P(ABC) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\ \gamma$. P(ABC) = $\frac{my+nx-xy}{2}$

$$\frac{1}{2}ab \cdot \sin\ \gamma = \frac{my+nx-xy}{2} /\cdot 2$$

$$ab \cdot \sin\ \gamma = my+nx-xy \Rightarrow \sin\gamma = \frac{my+nx-xy}{ab}$$ ______________1*bod*

$$\text{ctg}\gamma = \frac{\cos\ \gamma}{\sin\ \gamma} = \frac{\frac{y^2+mx-ny}{ab}}{\frac{my+nx-xy}{ab}} = \frac{y^2+mx-ny}{my+nx-xy}$$ __________________1*bod*

Izjednačavanjem desne strane jednakosti dobivamo

$$\text{ctg}\beta \cdot P(ACR) + \text{ctg}\gamma \cdot P(ABP) = \text{ctg}\beta \cdot \frac{m(n-y)}{2} + \text{ctg}\gamma \cdot \frac{n(m-x)}{2}$$
$$= \frac{x^2-mx+ny}{my+nx-xy} \cdot \frac{mn-my}{2} + \frac{y^2+mx-ny}{my+nx-xy} \cdot \frac{mn-nx}{2} =$$
$$= \frac{mnx^2-mx^2y-m^2nx+m^2xy+mn^2y-mny^2+mny^2-nxy^2+m^2nx-mnx^2}{2(my+nx-xy)}$$
$$-mn^2y+n^2xy$$

____

$= \frac{xy(m^2+n^2-mx-ny)}{2(my+nx-xy)}$ ___________________________2 boda

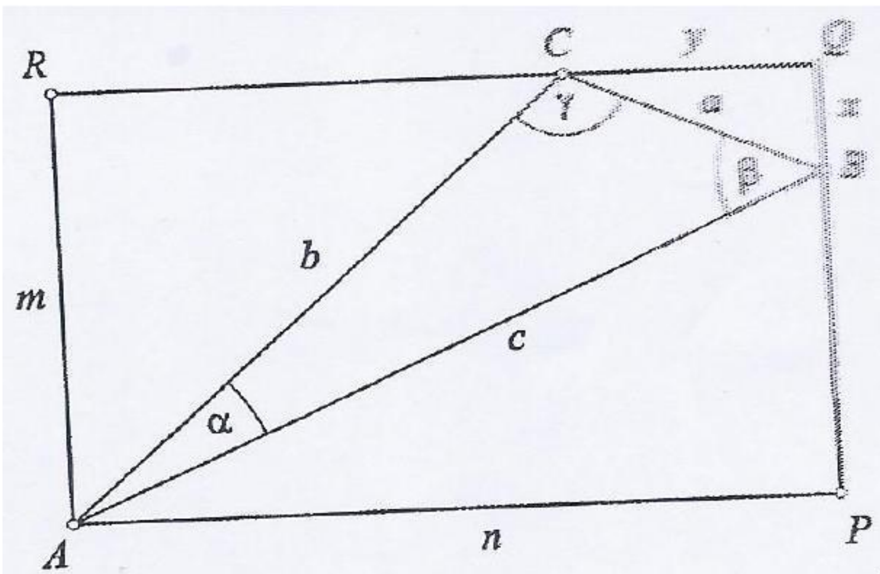
Lijeva strana jednakosti ctgα $P(BCQ) = \frac{m^2+n^2-mx-ny}{my+nx-xy} \cdot \frac{xy}{2}$

$= \frac{xy(m^2+n^2-mx-ny)}{2(my+nx-xy)}$ Type equation here.

______________________1 bod

Lijeva i desna strana jednakosti su jednake.

Drugo rješenje.



1 bod

Neka je $\varphi =\angle$ CAR. Tada je $\angle PBA = \alpha + \varphi \quad \angle QBC = \gamma - \varphi$.

Vrijedi ctg$\alpha \cdot P(BCQ) = \frac{|QC|\cdot|BQ|\cdot \text{ctg}\alpha}{2}$ ____ 1 bod

Znamo da je $\sin(\gamma - \varphi) = \frac{|QC|}{a} \Rightarrow a \cdot \sin(\gamma - \varphi) = |QC|$

$\cos(\gamma - \varphi) = \frac{|BQ|}{a} \Rightarrow a \cdot \cos(\gamma - \varphi) = |BQ|$

Vrijedi ctg $\alpha \cdot P(BCQ) = \frac{a^2 \cdot \sin(\gamma-\varphi)\cdot\cos(\gamma-\varphi)\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha}$

$$=\frac{a^2\cdot\frac{\sin\ 2(\gamma-\varphi)}{2}\cdot\frac{\sin\ 2\alpha}{2\sin\ \alpha}}{2\sin\ \alpha}=\frac{a^2\sin\ (2\gamma-2\varphi)\cdot\sin\ 2\alpha}{8\sin^2\ \alpha}$$

________________________2 boda

Prema sinusnoj teoremi $\frac{a}{\sin\ \gamma}=\frac{b}{\sin\ \beta}=\frac{c}{\sin\ \gamma}=2R$

$\frac{a}{\sin\ \alpha}=2R|^2$

$\frac{a^2}{\sin^2\ \alpha}=4R^2$ ______________________________________1 bod

Vrijedi ctg$\alpha\cdot P(BCQ)=\frac{R^2\cdot\sin(2\gamma-2\varphi)\cdot\sin 2\alpha}{2}$ ____________________ 1 bod

Prema formuli $\sin\ \alpha\cdot\sin\ \beta=\frac{1}{2}[\cos\ (\alpha-\beta)-\cos\ (\alpha+\beta)]$

Dobije se ctg$\alpha\cdot P(BCQ)=\frac{R^2}{4}[\cos(2\gamma-2\alpha-2\varphi)-\cos(2\alpha+2\gamma-2\varphi)]$ _____1 bod

Slično je ctg$\beta\cdot P(ACR)=\frac{|AR|\cdot|RC|\cdot\text{ctg}B}{2}$ ________________________1 bod

Znamo da je $\sin\ \varphi=\frac{|RC|}{b}\Rightarrow|RC|=b\cdot\sin\ \varphi$

$$\cos\ \varphi=\frac{|AR|}{b}\Rightarrow|AR|=b\cdot\cos\ \varphi$$

Vrijedi ctg$\beta\cdot P(ACR)=\frac{b^2\cdot\sin\ \varphi\cdot\cos\ \varphi\cdot\cos\ \beta}{2\sin\ \beta}=\frac{b^2\sin\ 2\varphi\cdot\sin\ 2\beta}{8\sin^2\ \beta}$

$$=\frac{R^2\cdot\sin\ 2\varphi\cdot\sin\ 2\beta}{2}=\frac{R^2}{4}[\cos\ (2\beta-2\varphi)-\cos\ (2\beta+2\varphi)]$$

_________________________2 boda

Slično je ctg$\gamma\cdot P(ABP)=\frac{|AP|\cdot|PB|\cdot\text{ctg}\gamma}{2}$ ______________________________ 1 bod

Znamo da je $\sin\ (\alpha+\varphi)=\frac{|AP|}{c}\Rightarrow|AP|=c\cdot\sin\ (\alpha+\varphi)$

$$\cos\ (\alpha+\varphi)=\frac{|PB|}{c}\Rightarrow|PB|=c\cdot\cos\ (\alpha+\varphi)$$

Vrijedi ctg$\gamma \cdot P(ABP) = \frac{c^2 \cdot \sin(\alpha+\varphi) \cdot \cos(\alpha+\varphi) \cdot \cos\gamma}{2\sin\gamma}$

$$= \frac{C^2 \sin(2\alpha + 2\varphi) \cdot \sin\ 2\gamma}{8\sin^2\ \gamma} = \frac{R^2 \cdot \sin(2\alpha + 2\varphi) \cdot \sin\ 2\gamma}{8\sin^2\ \gamma}$$
$$= \frac{R^2 \sin(2\alpha + 2\varphi) \cdot \sin\ 2\gamma}{2} =$$
$$= \frac{R^2}{4}[\cos(2\gamma - 2\alpha - 2\varphi) - \cos(2\alpha + 2\gamma + 2\varphi)]$$

______________________________2 boda

Uvrštavanjem u jednahost : $\frac{R^2}{4}[\cos(2\gamma - 2\alpha - 2\varphi) - \cos(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi)] =$

$$= \frac{R^2}{4}[\cos(2\beta - 2\varphi) - \cos(2\beta + 2\varphi)] + \frac{R^2}{4}[\cos(2\gamma - 2\alpha - 2\varphi) - \cos(2\alpha + 2\gamma + 2\varphi)] /: \frac{R^2}{4}$$
$$\cos(2\gamma - 2\alpha - 2\varphi) - \cos(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi) = \cos(2\beta - 2\varphi) - \cos(2\beta + 2\varphi) +$$
$$+ \cos(2\gamma - 2\alpha - 2\varphi) - \cos(2\alpha + 2\gamma + 2\varphi)$$ ____________________________$1 bod$

Uvrštavanjem jednakosti $\alpha + \beta + \gamma = 180°, \gamma = 180° - (\alpha + \beta)/2$

2γ = 360° - 2$(\alpha + \beta)$

Lako provjerimo datu jed*nakost*. ____________________________1 bod

Takmičenje učenika srednjih škola HNK-a iz MATEMATIKE
Mostar, 28. 03. 2026.

IV razred

Zadatak IV.1 (10 bodova)**:** Naći vrijednost x u izrazu $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ čiji je četvrti član razvoja binoma jednak 200.

Rješenje. Prvo, odredimo definiciono područje izraza. Jasno je da mora biti $x>0$ i $\log x+1\neq 0$, tj. $x\neq 10^{-1}$, pa je $\mathcal{D}=(0,10^{-1})\cup(10^{-1},+\infty)$ 1 bod

Ako u formulu za opći član razvoja binoma uvrstimo $k=3$, dobićemo

$$\begin{aligned}T_4&=\binom{6}{3}\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{6-3}\cdot\left(\sqrt[12]{x}\right)^3=\\&=\binom{6}{3}\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{3}\cdot\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^3=\\&=\binom{6}{3}x^{\frac{3}{2(\log x+1)}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=\binom{6}{3}x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

pa po uslovu zadatka imamo 2 boda

$$\begin{aligned}\binom{6}{3}x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}&=200\\20x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}&=200\\x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}&=10\end{aligned}$$

Logaritmiranjem posljednjeg izraza, dobijamo 2 boda

$$\log x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}=\log 10,$$

tj. 1 bod

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2\left(\log x+1\right)}+\frac{1}{4}\right)\cdot\log x&=1\\\frac{6+\log x+1}{4(\log x+1)}\cdot\log x&=1\\\frac{7+\log x}{4(\log x+1)}\cdot\log x&=1\\(7+\log x)\cdot\log x&=4(\log x+1)\\7\log x+\log^2 x&=4\log x+4\\\log^2 x+3\log x-4&=0.\end{aligned}$$

2 boda

Uvodeći smjenu $\log x=t$, dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2+3t-4=0$, čija su rješenja $t_1=-4$ i $t_2=1$. Za $t_1=-4$ dobijamo rješenje $x_1=10^{-4}=0,0001\in\mathcal{D}$, a za $t_2=1$, dobija se rješenje $x_2=10\in\mathcal{D}$. □ 2 boda

Zadatak IV.2 (10 bodova)**:** Za koje je realne parametre b i c definiciono područje funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-10x^2+bx+c}}$ jednako skupu $A = \left\{x \in \mathbb{R} | \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2-3x} > 0\right\}$?

Rješenje. Riješimo prvo nejednačinu $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2-3x} > 0$.
Logaritam je definisan ako je $\frac{2x-1}{2-3x} > 0$, što vrijedi za $x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. 2 boda

Zatim, rješavajući sada nejednačinu $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2-3x} > 0$, dobijamo redom

$$\frac{2x-1}{2-3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^0,$$
$$\frac{2x-1}{2-3x} - 1 < 0,$$
$$\frac{5x-3}{2-3x} < 0,$$

pri čemu je rješenje posljednje nejednačine

$$x \in \left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

2 boda

Uzimajući u obzir uslov da je $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, dobijamo da je rješenje polazne jednačine

$$x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right).$$

1 bod

Definiciono područje funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-10x^2+bx+c}}$ je skup svih realnih brojeva za koje vrijedi

$$-10x^2 + bx + c > 0.$$

1 bod

Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine $-10x^2 + bx + c = 0$, onda je rješenje nejednačine $-10x^2 + bx + c > 0$ interval (x_1, x_2) iz čega dobijamo da je

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{5}.$$

2 boda

Koristeći Vietove formule izračunat ćemo tražene parametre:

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{10}$$

iz čega slijedi da je

$$b = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) = 11,$$

a kako je

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{10},$$

to dobijamo da je

$$c = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) = -3.$$

Dakle, traženi parametri su $b = 11$ i $c = -3$. 2 boda

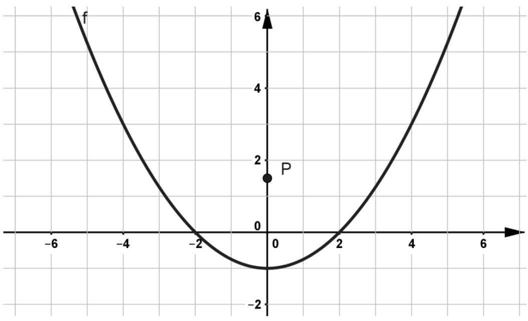
$\square$

Zadatak IV.3 (15 bodova)**:** Neka je S skup svih kompleksnih brojeva za koje vrijedi $|z| = \operatorname{Im}(z + 2i)$. Prikazati skup S u kompleksnoj ravni i odrediti površinu trougla kojem je jedan vrh tačka $P(0, \frac{3}{2})$, a druga dva vrha su tačke skupa S koje su najbliže tački P.

Rješenje. Uvrstimo $z = x + iy$ u uslov $|z| = \operatorname{Im}\,(z + 2i)$. Tada je

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= \operatorname{Im}\,(x+yi+2i)\\ x^2+y^2 &= (y+2)^2\\ x^2 &= 4y+4.\end{aligned}$$

Dakle, skup tačaka koji zadovoljavaju dati uslov leže na paraboli $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$. 3 boda



1 bod

Odredimo sada koje su tačke $T\,(x,y) = \left(x, \frac{1}{4}x^2 - 1\right)$ na paraboli najbliže tački $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Udaljenost tačke T od tačke P je

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2} - 1\right)^2} =\\ &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}\right)^2} =\\ &= \sqrt{\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}}\end{aligned}$$

3 boda

Tražimo x za koje funkcija $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}$ poprima najmanju vrijednost

$$x^2 = -\frac{b}{2a} = 2,$$

pa je $x = \pm\sqrt{2}$, a $y\left(\pm\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$.

Dakle, tačke na paraboli koje su najbliže tački P su: $A\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i $A\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4 boda

Sada vidimo da je $|AB| = 2\sqrt{2}$, a visina trougla $h = |y_P - y_A| = 2$, pa je površina traženog trougla

$$P = \frac{|AB| \cdot h}{2} = 2\sqrt{2}.$$

4 boda

□

Zadatak IV.4 (15 bodova)**:** Brojevi $a_1, a_2, a_3, \cdots$ čine aritmetički niz, pri čemu je $a_1 \neq a_2$. Tri člana istoga niza, a_2, a_5 i a_9, čine geometrijski niz tim redoslijedom. Odrediti najmanje moguće pozitivne cijele brojeve k i l za koje i brojevi a_3, a_k, a_l također čine geometrijski niz tim redoslijedom

Rješenje. Neka je prvi član aritmetičkog niza a i neka je d njegova razlika. Tada je opći član tog niza jednak

$$a_n = a + (n-1)\,d.$$

Za geometrijski niz a_2, a_5, a_9, vrijedi

$$\begin{aligned}(a+4d)^2 &= (a+d)\,(a+8d)\\ a^2+8ad+16d^2 &= a^2+9ad+8d^2\\ ad &= 8d^2.\end{aligned}$$

Kako je prema uslovu zadatka $d \neq 0$, dobijamo iz posljednje jednakosti da je — 4 boda

$$a = 8d.$$

1 bod

Sada opšti član niza postaje

$$a_n = 8d + (n-1)\,d = (7+n)\,d.$$

2 boda

Sada koristeći posljednju jednakost i činjenicu da je a_3, a_k, a_l geometrijski niz tj.

$$a_k^2 = a_3 \cdot a_l, \quad 3 < k < l,$$

1 bod

dobijamo

$$(7+k)^2\,d^2 = 10d\,(7+l)\,d,$$

tj.

$$(7+k)^2 = 10\,(7+l)\,.$$

3 boda

Zaključujemo da $7+k$ mora biti djeljivo sa brojem 10. — 2 boda

Za $k = 3$ dolazimo do kontradikcije s obzirom na uslov $3 < k < l$.

1 bod

Za $k = 13$ dobijamo da je $l = 33$ što zadovoljava uslov zadatka.
Dakle, traženi brojevi su

$$k = 13 \;\text{ i }\; l = 33.$$

1 bod

$\square$